ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ВИДА Y = KX + B НА ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ (K; B)

Сугаков Р.В.

с. Тугулук, МКОУ СОШ № 8, 7 класс

Научный руководитель: Шеховцова Е.С., учитель математики, с. Тугулук, МКОУ СОШ № 8

Уравнение вида $y = kx + b$ задается как парой переменных x и y, так и парой параметров k, b. Поэтому возник вопрос, возможно ли изобразить прямую из плоскости xy соответствующим ей объектом в плоскости параметров (k; b), что будет представлять собой этот объект, как будут изображены семейства прямых со схожими свойствами.

Цели работы:

1) отображение графиков линейных функций на плоскости параметров;

2) определение семейства прямых, отображенных на плоскости параметров в виде прямых или областей;

Задачи работы:

1) научиться выполнять построения графиков линейных функций на плоскости параметров, и наоборот, уметь выполнить построение графика в плоскости xy по соответствующему объекту из плоскости параметров ab;

2) выяснить, какие семейства прямых из плоскости xy изображаются на плоскости параметров в виде прямых, в виде областей;

3) обобщить полученные результаты для правил построения любого семейства прямых.

Гипотеза:

Если прямые на плоскости (x; y) пересекаются в одной точке или параллельны, то соответствующие им точки на плоскости (k; b) лежат на одной прямой.

Методы исследования:

1) экспериментальный;

2) аналитико – синтетический.

Предмет исследования: отображение графиков линейных функций на плоскость параметров (k, b).

Объект исследования: график линейной функции.

Семейства прямых на координатной плоскости (x; y), соответствующих точкам плоскости (k; b)

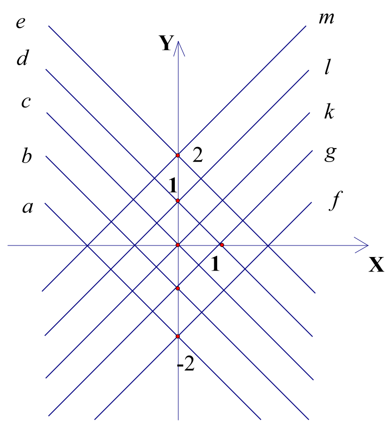
Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $y = kx + b$, где x и y – переменные, k, b – некоторые числа.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая.

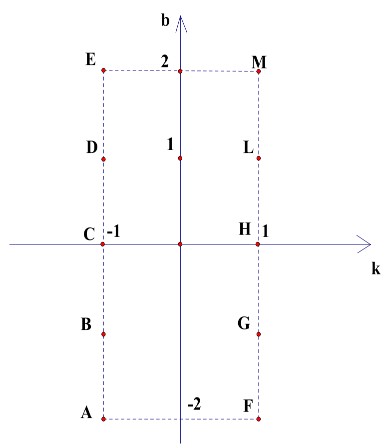
Рассмотрим координатную плоскость (k; b). Каждая прямая вида $y = kx + b$ изображается на этой плоскости в виде точки с координатами (k; b).

Например, прямая $y = 2x + 5$ изображается на плоскости (k; b) в виде точки (2; 5), а прямая $y = -2$ в виде точки (0; – 2).

Выполняя построения графиков линейных функций на плоскости параметров, было замечено, что параллельные прямые отображаются на этой плоскости в виде точек, лежащих на одной прямой, перпендикулярной оси Ok (рис. 1).



Плоскость (x; y)



Плоскость (k; b)

Рис. 1

Действительно, у точек, лежащих на таких прямых координата k одинакова, а это коэффициент при x, по которому можно определить взаимное расположение графиков прямых на плоскости (x; y).

Чем ближе вертикальные прямые к началу координат, тем меньше угол наклона между возрастающими прямыми и осью Ox и больше угол наклона между убывающими прямыми и осью Ox (рис. 2).

Раскрашенные области

На плоскости, кроме точек и прямых, можно изображать области (будем их выделять цветом).

Рассмотрим следующую задачу: на координатной плоскости (k; b) изображено множество точек, соответствующее некоторому семейству прямых вида $y = kx + b$. На плоскости (x; y) все эти прямые покрашены. Изобразить на плоскости (x; y) получившуюся покрашенную область. Были получены следующие результаты (рис. 2–7).

Точки внутри квадрата на плоскости (k; b) в 5 и 6 случае имеют одинаковые закрашенные области на плоскости (x; y), потому что любая точка внутри квадрата лежит на отрезке, параллельном оси абсцисс плоскости (k; b) с концами на сторонах квадрата. На плоскости (x; y) это будет означать, что соответствующая выбранной точке прямая будет лежать в полосе между прямыми, соответствующими концам отрезка, то есть в покрашенной области.

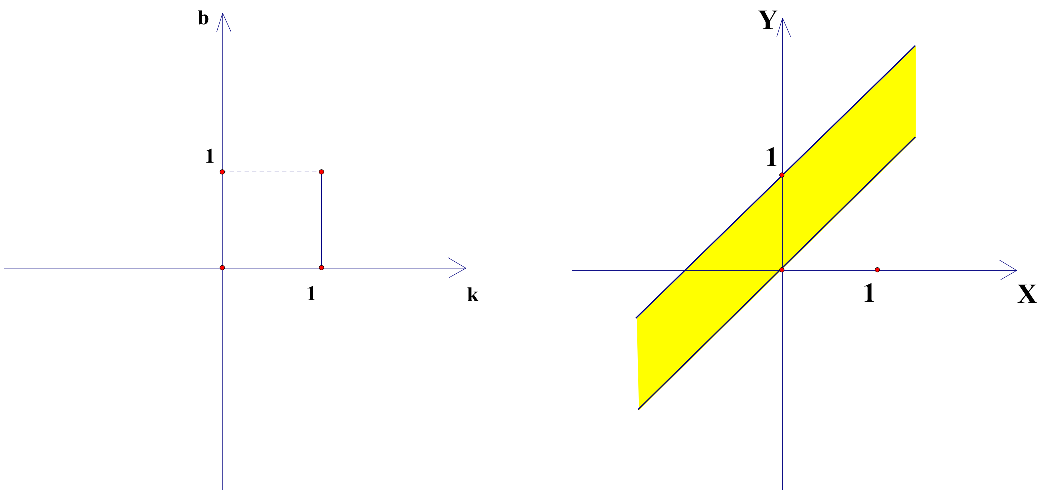


Рис. 2

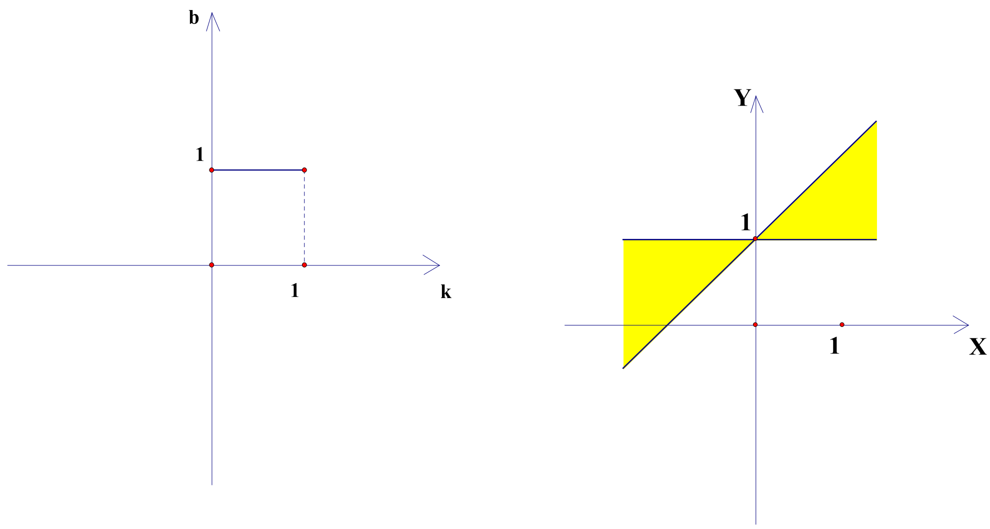


Рис. 3

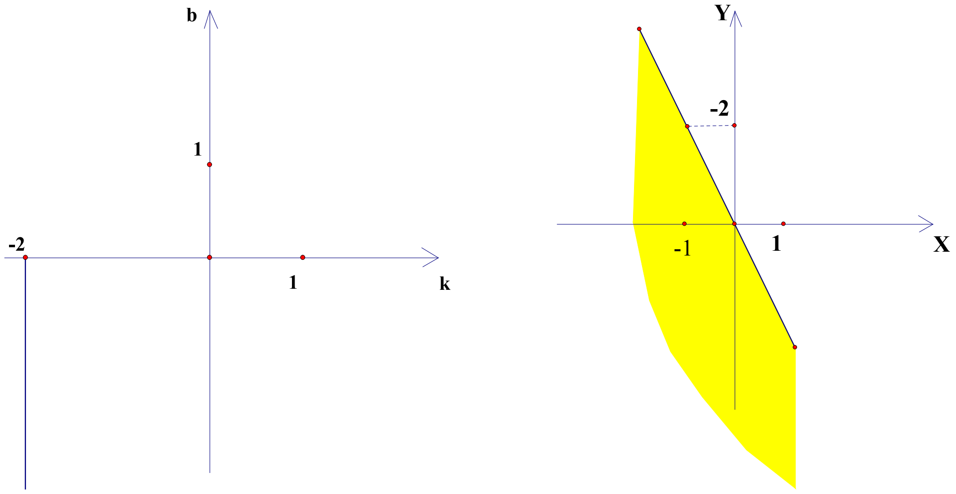


Рис. 4

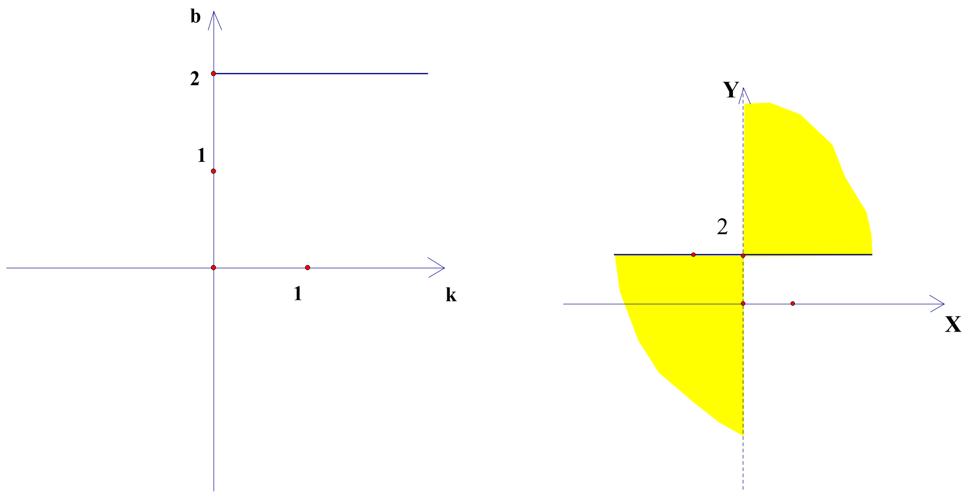


Рис. 5

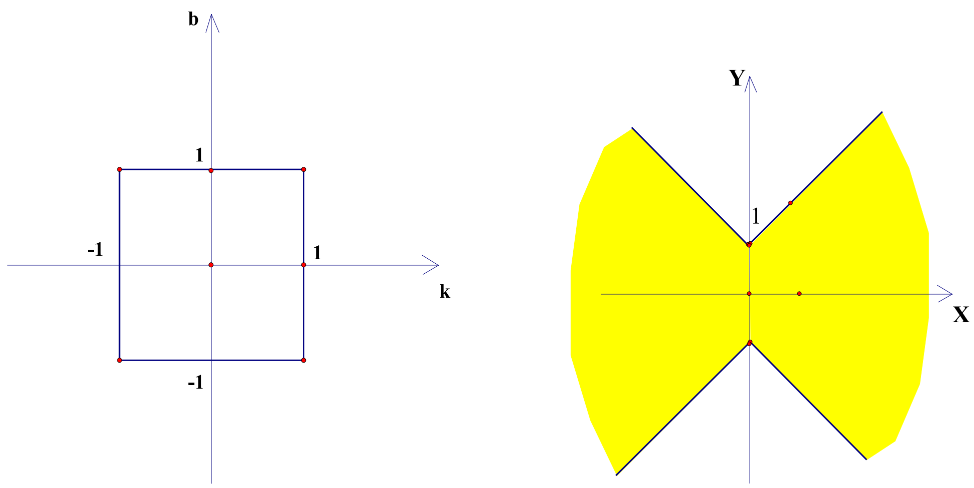


Рис. 6

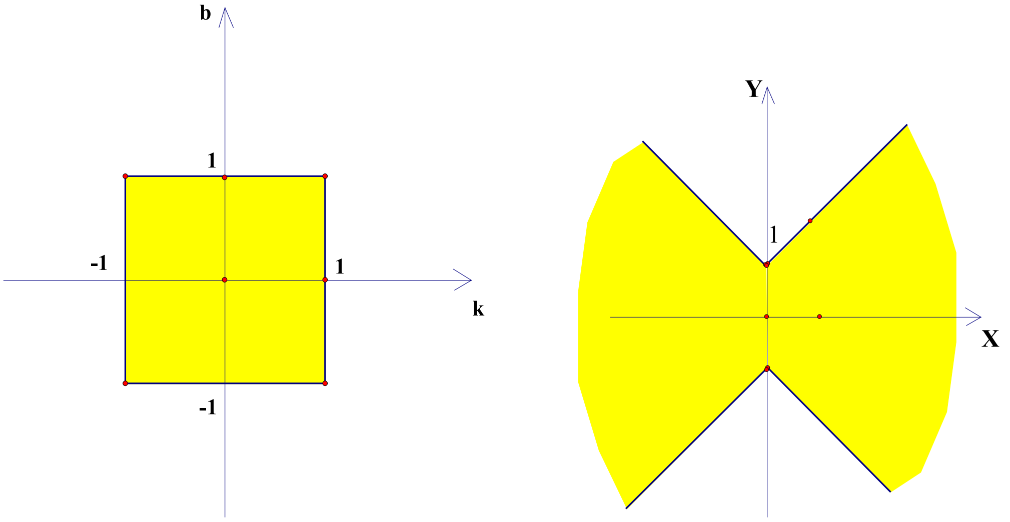


Рис. 7

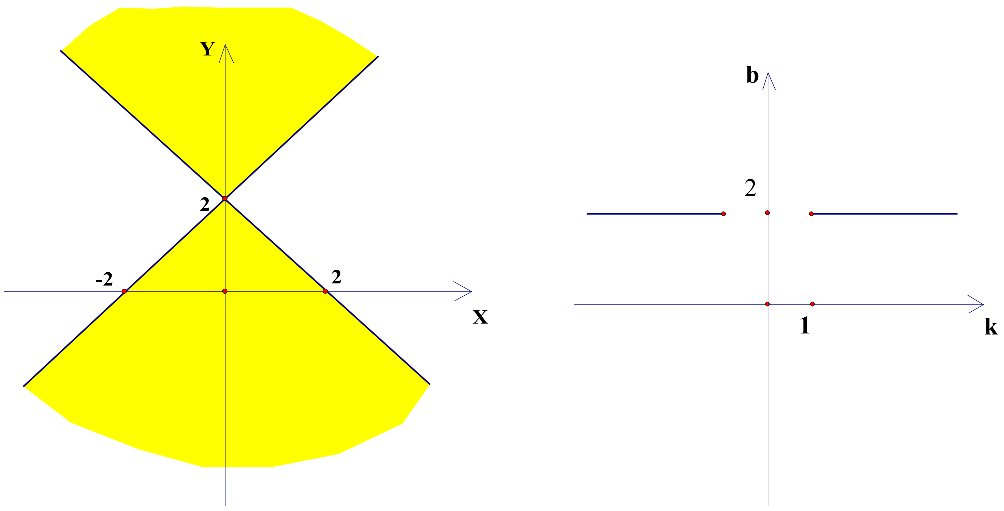


Рис. 8

Исследуем обратную задачу: на координатной плоскости (x; y) покрашено некоторое семейство прямых. В результате на плоскости получилась покрашенная область. Изобразите на координатной плоскости (k; b) множество точек, соответствующее этому семейству прямых. Оказывается, в некоторых случаях это можно сделать не единственным образом (рис. 8–9).

Как видно из рис. 9 возможно несколько решений. Например, объединение луча (полуоси ординат в положительном направлении) и отрезка [0; 2] на оси абсцисс. Или объединение двух лучей: полуоси ординат в положительном направлении и параллельного луча с вершиной в точке (2; 0).

Прямая на плоскости (k; b)

Рассмотрим на плоскости (k; b) прямую $b = k$. Каждая точка этой прямой задает на плоскости (x; y) прямую, а вся прямая $b = k$ задает на плоскости (x; y) семейство прямых. Для определения свойства семейства прямых сначала были взяты несколько конкретных точек на прямой $b = k$ и построены соответствующие им прямые на плоскости (x; y). Оказалось, что все прямые проходят через точку (– 1; 0).

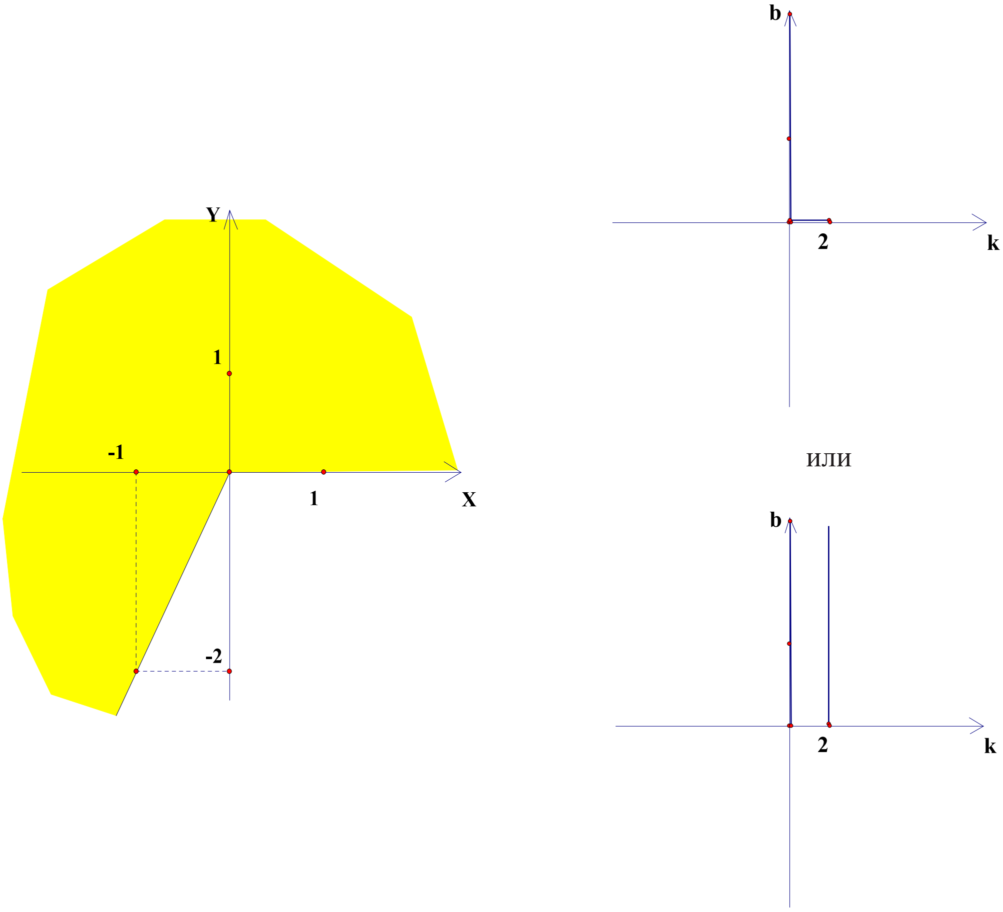


Рис. 9

Докажем это утверждение. Так как $b = k$, то на плоскости $(x; y)$ мы получаем семейство прямых вида $y = kx + k$. Если записать их в виде $y = k(x + 1)$, то можно заметить, что все эти прямые проходят через точку $(-1; 0)$.

На координатной плоскости $(k; b)$ проведем три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает пучок прямых на плоскости $(x; y)$. Три точки на плоскости $(x; y)$, через которые проходят соответствующие пучки прямых, сами лежат на одной прямой.

На координатной плоскости $(k; b)$ проведем три параллельные прямые. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости $(x; y)$. Три точки на плоскости $(x; y)$, через которые проходят соответствующие пучки прямых, также лежат на одной прямой.

В случае пересечения три точки лежат на наклонной прямой, а в случае параллельности прямая вертикальна.

Можно сделать вывод, что три параллельные прямые и три прямые, имеющие общую точку, ведут себя одинаково (их образы лежат на одной прямой). Если договориться считать, что параллельные прямые также имеют общую точку – бесконечно удалённую, то не надо будет рассматривать эти два случая отдельно.

Заключение

В ходе исследования были выполнены построения графиков линейных функций на плоскости параметров, и наоборот, выполнены построения графика в плоскости $(x; y)$ по соответствующему объекту из плоскости параметров $(k; b)$. Графики и их образы выполнялись как вручную, так и с помощью программы «Математический конструктор».

Были сделаны следующие выводы:

– семейство пересекающихся прямых в одной точке из плоскости $(x; y)$ изображается на плоскости параметров в виде прямой;

– замкнутая область из плоскости параметров представляет собой закрашенную область, ограниченную двумя парами пресекающихся прямых;

– образы параллельных прямых лежат на одной прямой, перпендикулярной оси *Ok* в плоскости параметров.

Одинаковое поведение образов параллельных прямых и прямых, имеющих общую точку (лежат на одной прямой), позволяет не рассматривать эти случаи отдельно, если считать, что параллельные прямые также имеют общую точку – бесконечно удалённую.

Было доказано, что прямая $b = k$ задает на плоскости $(x;\ y)$ семейство пересекающихся прямых, проходящих через точку (– 1; 0).

Предположение о том, что если прямые на плоскости $(x;\ y)$ пересекаются в одной точке или параллельны, то соответствующие им точки на плоскости $(k;\ b)$ лежат на одной прямой, подтвердилось.

Результаты исследования можно использовать на факультативных занятиях в старших классах при введении понятия проективной плоскости, а также для углубленного изучения свойств графиков линейной функции.

Планируется создать программу для построения образов линейной функции на плоскости параметров и для обратной задачи.

Список литературы

1. Алгебра, 7 класс: учеб. Для общеобразоват. Организаций / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

2. Курант Р., Робинс Г. «Что такое математика?». – МЦНМО, 2001.

3. Табачников С.Л., Фукс Д.Б. «Математический дивертисмент». – МЦНМО, 2011.

4. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. «Задачи с параметрами», Авангард, 2007.

5. Шноль Д.Э. Дидактические материалы для проведения серии уроков по теме: «Плоскости параметров (k; b) линейной функции $y = kx + b$».

6. Шноль Д.Э., Сгибнев А.И. Элементы исследования на уроке и на кружке.