ТАКОЕ РАЗНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Кирина Е.С., Ткаченко Г.Р.

г. Калуга, МБОУ «Лицей № 9 имени К.Э. Циолковского», 7 «А» класс

Научный руководитель: Рылова И.Г., г. Калуга, учитель математики, МБОУ «Лицей № 9 имени К.Э. Циолковского»

Данная статья является реферативным изложением основной работы. Полный текст научной работы, приложения, иллюстрации и иные дополнительные материалы доступны на сайте II Международного конкурса научно-исследовательских и творческих работ учащихся «Старт в науке» по ссылке: https://www.school-science.ru/2017/7/26982.

Прямая линия на плоскости – это одна из простейших геометрических фигур, знакомая вам ещё с младших классов, и сегодня мы узнаем, как с ней справляться с помощью математического анализа. Часто при изучении различных предметов, например, физики, (законы движения) требуется построить прямую; знать, каким уравнением задаётся прямая. Однако, часто построить прямую по заданной формуле линейной функции бывает затруднительно, если вычислять координаты точек прямой. Появилась гипотеза: уравнение прямой возможно задать не только по известной формуле $y = kx + b$.

Цель исследования: рассмотреть способы, с помощью которых можно составить уравнение прямой на плоскости и овладеть практическими навыками, техническими приёмами, которые потребуются для построения графиков линейной функции. Задачи исследования:

1. Ознакомиться с уравнением прямой с угловым коэффициентом.
2. Ознакомиться с общим уравнением прямой.
3. Ознакомиться с уравнением прямой в отрезках.
4. Научиться решать диафантовые уравнения 1 степени в целых числах.
5. Научиться строить прямую линию задаваемую формулой различными способами, переходя из одного вида уравнения прямой к другим. Выявить слабые и сильные стороны этих способов.

Теоретическая часть

Всем известный «школьный» вид уравнения прямой $y = kx + b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B, *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

В аналитической геометрии уравнение прямой почти всегда будет задано в общей форме. Ну, а при необходимости его легко привести к «школьному» виду с угловым коэффициентом $y = kx + b$ (за исключением прямых, параллельных оси ординат).

Уравнение прямой в отрезках: если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$, $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1, C \neq 0 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где

$$a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B}.$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy.

Легко усмотреть, что данная прямая однозначно определяется красным и зелёным отрезками, отсюда и название – «уравнение прямой в отрезках».

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Диафантовые уравнения

Диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами). Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями. Диофантовы уравнения связаны с именем древнегреческого математика Диофанта Александрийского.

Правило 1. Если c не делится на d, то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых числах НОД(a, b) = d.

Правило 2. Чтобы найти решение уравнения $ax + by = c$ при взаимно-простых a и b, нужно сначала найти решение (X_0, y_0)

уравнения $ax + by = 1$; числа CX_0, Cy_0 составляют решение уравнения $ax + by = c$.

Решить в целых числах $(x; y)$ уравнение

$$5x - 8y = 19. \qquad (1)$$

Решение.

Первый способ. Нахождение частного решения методом подбора и запись общего решения.

Знаем, что если НОД$(a, b) = 1$, т.е. a; b взаимно-простые числа, то уравнение (1)

имеет решение в целых числах x; y НОД$(5, 8) = 1$. Методом подбора находим частное решение: $X_0 = 7$, $y_0 = 2$.

Итак, пара чисел (7; 2) – частное решение уравнения (1).

Значит, выполняется равенство:

$5{\cdot}7 - 8{\cdot}2 = 19$. (2)

Вопрос: Как имея одно решение записать все остальные решения?

Вычтем из уравнения (1) равенство (2) и получим:

$$5\cdot(x-7)-8\cdot(y-2)=0.$$

Отсюда

$$x-7=\frac{8\cdot(y-2)}{5}.$$

Из полученного равенства видно, что число $x - 7$ будет целым тогда и только тогда, когда $y - 2$ делится на 5, т.е. $y-2=5n, n\in Z$. Итак, $y=2+5n, x=7+8n, n\in Z$, Тем самым все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x=7+8n, n\in Z, \\ y=2+5n, n\in Z. \end{cases}$$

Второй способ. Решение уравнения относительно одного неизвестного.

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором наименьший (по модулю) коэффициент.

$$5x-8y=19 \Leftrightarrow x=\frac{8y+19}{5}.$$

Остатки при делении на 5: 0, 1, 2, 3, 4. Подставим вместо y эти числа.

Если $y = 0$, то $x=\frac{19}{5}$.

Если $y = 1$, то $x=\frac{27}{5}$.

Если $y = 2$, то $x=\frac{35}{5}=7, 7\in Z$.

Если $y = 3$, то $x=\frac{43}{5}$.

Если $y = 4$, то $x=\frac{51}{5}$.

Итак, частным решением является пара (7; 2).

Тогда общее решение:

$$\begin{cases} x=7+8n, n\in Z, \\ y=2+5n, n\in Z. \end{cases}$$

Третий способ. Универсальный способ поиска частного решения.

Для решения применим алгоритм Евклида. Мы знаем, что для любых двух натуральных чисел a; b, таких, что НОД$(a, b) = 1$ существуют целые числа x; y такие, что $ax + by = 1$.

План решения:

1. Сначала решим уравнение $5m-8n=1$ используя алгоритм Евклида.

2. Затем найдем частное решение уравнения (1)по правилу 2.

3. Запишем общее решение данного уравнения (1).

1. Найдем представление: $1=5m-8n$. Для этого используем алгоритм Евклида.

$$8=5\cdot1+3,$$
$$5=3\cdot1+2,$$
$$3=2\cdot1+1$$

2. Из этого равенства выразим 1.

$$1=3-2\cdot1=3-(5-3\cdot1)\cdot1=$$
$$=3-5\cdot1+3\cdot1=3\cdot2-5\cdot1=$$
$$=(8-5\cdot1)\cdot2-5\cdot1=8\cdot2-5\cdot2-5\cdot1=$$
$$=5\cdot(-3)-8\cdot(-2).$$

Итак, $m=-3, n=-2$. Частное решение уравнения (1):

$$X_0=19m, y_0=19n.$$

Отсюда получим:

$$X_0=19\cdot(-3)=-57, y_0=19\cdot(-2)=-38.$$

Пара $(-57;-38)$ – частное решение (1).

3. Общее решение уравнения (1):

$$\begin{cases} x=-57+8n, n\in Z, \\ y=-38+5n, n\in Z. \end{cases}$$

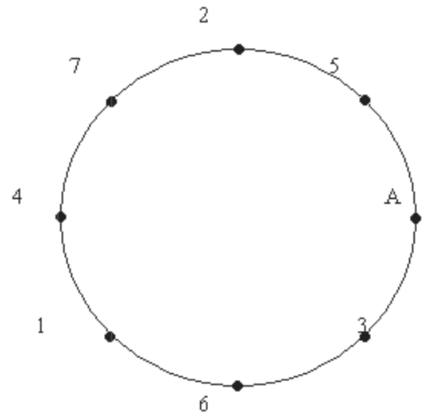
Четвертый способ. Геометрический.

План решения.

1. Решим уравнение $5x - 8y = 19$ геометрически.

2. Запишем частное решение уравнения (1).

3. Запишем общее решение данного уравнения (1).



Отложим на окружности последовательно друг за другом равные дуги, составляющие $\frac{5}{8}$-ю часть полной окружности. За 8 шагов получим все вершины правильного вписанного в окружность 8-угольника. При этом сделаем 5 полных оборотов.

На 5-ом шаге получили вершину, соседнюю с начальной, при этом сделали 3 полных оборота и еще прошли $\frac{1}{8}$-ю часть окружности, так что

$$x\cdot\frac{5}{8}=y+\frac{1}{8}.$$

Итак, $X_0 = 5$, $y_0 = 3$ является частным решением уравнения $5x - 8y = 19$.

2. Частное решение уравнения (1):

$$X_0=19\cdot 5=95, y_0=19\cdot 3=57.$$

3. Общее решение уравнения (1):

$$\begin{cases} x=95+8n, n\in Z,\\ y=57+5n, n\in Z.\end{cases}$$

Практическая часть

ПРИМЕР 1.

Построить график функции $4x - 7y = -2$.

1 способ.

Определим две точки, принадлежащие графику данной функции, используя диафантовое уравнение: $4x - 7y = -2$.

Легко подобрать частное решение: $x = 3$; $y = 2$.

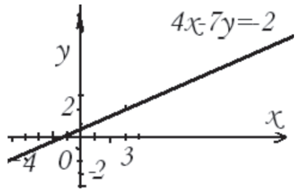
Составим систему, которая определяет все целые решения:

$$\begin{cases} x=3+7t,\\ y=2+4t, t\in Z.\end{cases}$$

Задавая различные значения переменной t, получаем значения переменных x, y.

Например,

$$t=1\Rightarrow\begin{cases} x=10,\\ y=6.\end{cases} t=-1\Rightarrow\begin{cases} x=-4,\\ y=-2.\end{cases}$$



2 способ.

$4x - 7y = -2$. Выразим переменную x через y:

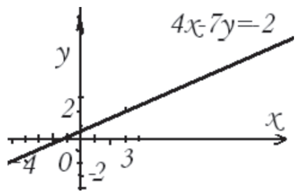
$$y=\frac{2+4x}{7}=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}x.$$

Нетрудно заметить, что *трудно, занимает продолжительное время* подобрать целое значение переменной x такое, чтобы значение переменной y также было целым. Значение переменной y будет принимать целое значение, если выражение $2 + 4x$ поделится на 7 без остатка, т.е.

$$(2+4x)\in\{\ldots,-21,-14,-7,7,14,21,\ldots\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \ldots\\ 2+4x=-21,\\ 2+4x=-14,\\ 2+4x=-7,\\ 2+4x=7,\\ 2+4x=14,\\ \ldots\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \ldots\\ x=-\frac{23}{4}, x\notin Z,\\ x=-4, y=-2\\ x=-\frac{9}{4}, x\notin Z,\\ x=-\frac{5}{4}, x\notin Z,\\ x=3, y=2\\ \ldots\end{array}\right.$$

Строим график функции по двум найденным точкам (– 4; – 2), (3; 2).

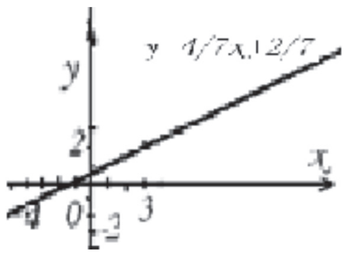


3 способ.

Найдем две точки графика функции $y=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}x$, заполняя таблицу:

x	y
3	2
– 4	– 2

Сложно подобрать целое значение переменной x такое, чтобы значение переменной y также было целым.

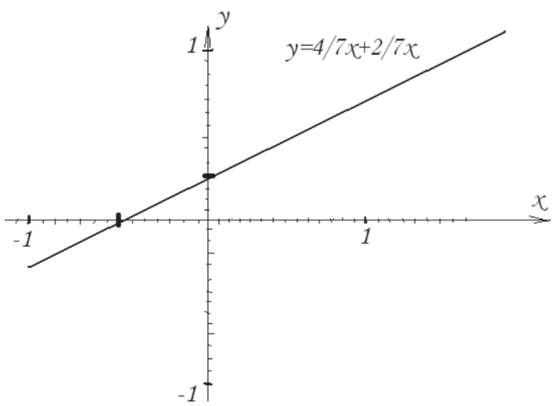


4 способ.

Преобразуем уравнение прямой $4x - 7y + 2 = 0$ к уравнению прямой в отрезках:

$$-2x+\frac{7}{2}y=1,\ \frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{7}{2}y=1,\ \frac{x}{-\frac{7}{14}}+\frac{y}{\frac{4}{14}}=1.$$

Как видим, знаменатели дробей приведены к общему знаменателю для удобства построения прямой. За единицу масштаба выбираем 14 делений. Число $-\frac{7}{14}$ откладываем на оси Ox, а число $\frac{4}{14}$ на оси Oy:



Способ рациональный, но создалась *проблема с масштабной единицей.*

5 способ.

Запишем функцию в особый вид: в числителе дроби должна стоять переменная x, если перед ней стоял знак «-», то его пишем в знаменателе дроби, содержащей переменную x, свободный член не преобразуем. В нашем случае функция примет вид:

$$y=\frac{x}{\frac{7}{4}}+\frac{2}{7}=\frac{x}{\frac{49}{28}}+\frac{8}{28}.$$

На оси Oy откладывается число $\frac{8}{28}$, от него вправо вдоль оси Ox отступаем на 49 единиц, а затем вверх на 28 единиц вдоль оси Oy. Как видим, стоит *проблема с масштабной единицей, поэтому построение таким способом затруднительно, но возможно.*

6 способ. Построим график функции, используя точки пересечения с осями координат:

$$y=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}x.$$

Пересечение с осью Oy:

$$y=0;\frac{2}{7}+\frac{4}{7}x=0;2+4x=0,$$

$$x=-\frac{1}{2},$$

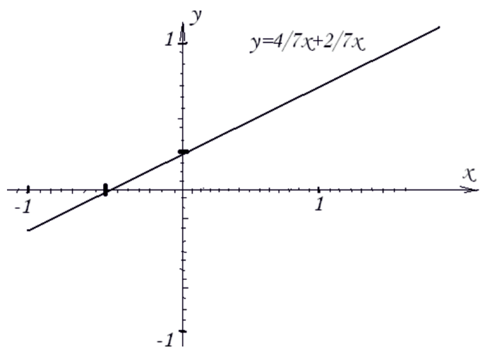
$$\left(-\frac{1}{2};0\right).$$

Пересечение с осью Ox:

$$y(0)=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\cdot 0=\frac{2}{7},$$

$$\left(0;\frac{2}{7}\right)$$

И вновь, видим, стоит *проблема с масштабной единицей, поэтому построение таким способом затруднительно, но возможно.* Данный способ приводит к уравнению прямой в отрезках.



Итак, наиболее рациональными оказались 1 и 2 способы. Заметим, что функция, записанная с угловым коэффициентом, содержит дроби с одинаковыми знаменателями.

ПРИМЕР 2. Построить график функции

$$y=\frac{4}{5}x+3.$$

1 способ.

Определим две точки, принадлежащие графику данной функции, используя диафантовое уравнение: $4x - 5y = -15$.

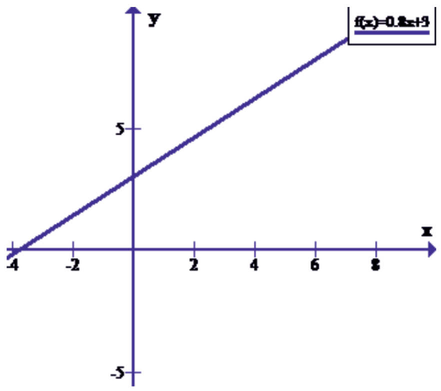
Легко подобрать частное решение: $x = 0$; $y = 3$.

Составим систему, которая определяет все целые решения:

$$\begin{cases} x = 0 + 5t, \\ y = 3 + 4t, t \in Z. \end{cases}$$

Задавая различные значения переменной t, получаем значения переменных x, y. Например,

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 7. \end{cases} t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = -1. \end{cases}$$



2 способ.

$4x - 5y = -15$. Выразим переменную y через x:

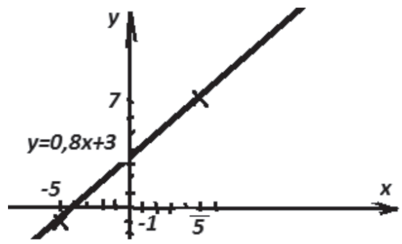
$$y = \frac{4x + 15}{5} = 3 + \frac{4}{5}x.$$

Нетрудно заметить, что *трудно, занимает продолжительное время* подобрать целое значение переменной x такое, чтобы значение переменной y также было целым. Значение переменной y будет принимать целое значение, если выражение $15 + 4x$ поделится на 5 без остатка, т.е.

$$(15 + 4x) \in \{..., -20, -15, -5, 5, 10, 20, ...\}$$

$$\left[\begin{array}{l} ... \\ 15 + 4x = -20, \\ 15 + 4x = -15, \\ 15 + 4x = -10, \\ 15 + 4x = -5, \\ ... \\ 15 + 4x = 35, \\ ... \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} ... \\ x = -\frac{35}{4}, x \notin Z, \\ x = -\frac{30}{4}, x \notin Z, \\ x = -\frac{25}{4}, x \notin Z, \\ x = -5, y = -1 \\ x = 5, y = 7 \\ ... \end{array}\right.$$

Строим график функции по двум найденным точкам (– 5; – 1), (5; 7).

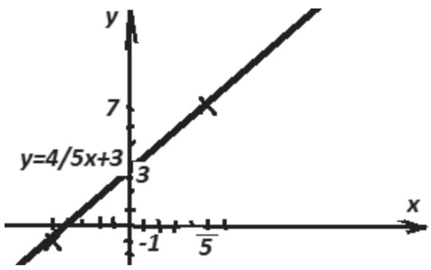


3 способ.

Найдем две точки графика функции $y = \frac{4x + 15}{5} = 3 + \frac{4}{5}x$, заполняя таблицу:

x	y
5	7
0	3

Необходимо подобрать целое значение переменной x такое, чтобы значение переменной y также было целым.

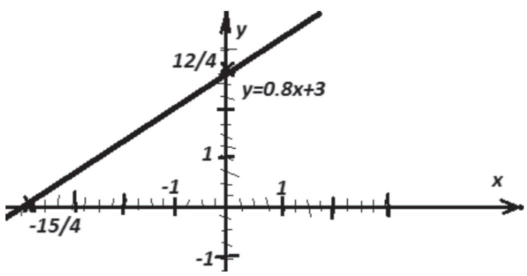


4 способ.

Преобразуем уравнение прямой $4x - 5y = -15$ к уравнению прямой в отрезках:

$$-\frac{4}{15}x + \frac{5}{15}y = 1, \frac{x}{-\frac{15}{4}} + \frac{y}{\frac{3}{1}} = 1, \frac{x}{-\frac{15}{4}} + \frac{y}{\frac{12}{4}} = 1.$$

Как видим, знаменатели дробей приведены к общему знаменателю для удобства построения прямой. За единицу масштаба выбираем 4 деления. Число $-\frac{15}{4}$ откладываем на оси Ox, а число $\frac{12}{4}$ на оси Oy:



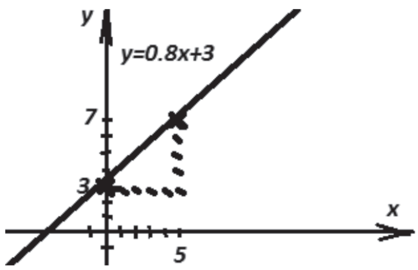
Способ рациональный, но создалась *проблема с масштабной единицей*.

5 способ.

Запишем функцию в особый вид: в числителе дроби должна стоять переменная x, если перед ней стоял знак «-», то его пишем в знаменателе дроби, содержащей переменную x, свободный член не преобразуем. В нашем случае функция примет вид:

$$y = 3 + \frac{x}{\frac{5}{4}}.$$

На оси Oy откладывается число 3, от него вправо вдоль оси Ox отступаем на 5 единиц, а затем вверх на 4 единиц вдоль оси Oy:



6 способ. Построим график функции, используя точки пересечения с осями координат:

$$y = 3 + \frac{4}{5}x.$$

Пересечение с осью Oy:

$$y = 0; 3 + \frac{4}{5}x = 0; 15 + 4x = 0; x = -\frac{15}{4},$$

$$\left(-3\frac{3}{4}; 0\right).$$

Пересечение с осью Ox:

$$y(0) = 3 + \frac{4}{5} \cdot 0 = 3,$$

$$(0;3)$$

И вновь, видим, стоит *проблема с масштабной единицей, поэтому построение таким способом затруднительно, но возможно.*

Выводы

В школьном курсе алгебры построение графика линейной функции сводится к нахождению координат двух точек, так как её график – прямая. Легко построить прямую, если координаты полученных точек – целые числа. Однако, как показано выше, не всегда быстро можно подобрать такое значение аргумента, при котором и значение функции – целое число.

В ходе исследований способов построения прямой, прибегая к различным видам задания линейной функции, рассмотрены шесть способов, с помощью которых можно построить график линейной функции и овладеть практическими примерами, техническими приёмами, которые для этого потребуются. Осуществлён переход от нахождения целых решений линейного уравнения с двумя переменными к построению прямой в прямоугольной системе координат. Выбор того или иного способа зависит от сложности заданной формулы линейной функции, а умение сделать выбор – от приобретенных навыков и умений. Для построения графиков линейных функций пользовались программой Graph и программой Paint, а также комбинацией этих программ.