НЕСТАНДАРТНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ И ЦЕПЬ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

Насонов И.В.

г. Липецка, МАОУ СОШ № 59, 7 класс

Научный руководитель: Блюмин С.Л., г. Липецк д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ЛГТУ

В данной работе систематически используется операция логарифмирования, тесно связанная с операцией возведения в степень. Напомним, что логарифм числа x по основанию a есть показатель той степени, в какую нужно возвести a, чтобы получить x. Ниже представлены некоторые свойства степеней и логарифмов:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$(x+y)^a = \text{Бином Ньютона}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y = (a^x)^y$$

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$$

$$x^a = y \quad x = \sqrt[a]{y}$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$$

$$a^x = y \quad x = \log_a y$$

$$a^{\log_a^x} = x$$

Отправной точкой для данного исследования послужило свойство:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Оно вызвало у меня 2 вопроса:

– логарифм суммы равен какой операции над логарифмами слагаемых?

– логарифм какой операции равен произведению логарифмов операндов?

(операнд – аргумент операции), то есть

$$\log_a(x+y) = (\log_a x)?(\log_a y)$$

$$\log_a(x ? y) = \log_a x \cdot \log_a y$$

Среди общеизвестных свойств логарифмов эти свойства отсутствуют.

Это не случайно. В книге [1] на стр. 160 читаем:

«Отметим еще малоизвестную коммутативную и ассоциативную операцию, ступенью ниже сложения, относительно которой сложение, как легко убедиться, дистрибутивно:

$$y = \log_n(n^a + n^b)$$

Определенная так функция двух переменных $y = f(a;b)$ и есть, очевидно, та функция от $\log x$ и $\log y$, которая выражает $\log(x+y)$ через $\log x$ и $\log y$: $\log(x+y) = f(\log x, \log y)$.»

К сожалению, автор [1] не указывает тот источник из (довольно представительного на то время – 1938 год) списка литературы, в котором впервые была указана эта малоизвестная операция. Сам автор пишет:

«Имея в виду сравнительную элементарность вопросов, я позволил себе не наводить литературных справок и потому лишен возможности сослаться на какие-либо литературные источники по указанным (этому и другим) пунктам.»

Следует отметить, что упоминание об указанной малоизвестной операции, ступенью ниже сложения, завершает «§ 45. Операции высших ступеней» «Главы V. Операторная теория действий третьей ступени»; понимая под операцией первой ступени сложение, а второй – умножение, автор подробно рассматривает в указанной главе операцию третьей ступени, а в указанном параграфе намечает «само собой напрашивающийся вопрос об операциях четвертой и высших ступеней».

Современное изложение этих вопросов, без ссылки на книгу [1], содержится в работе [2], посвященной «естественной цепи бинарных арифметических операций». Операции определяются с использованием обозначаемых через ln натуральных логарифмов, для которых фигурирующее выше η равно числу e – основанию натуральных логарифмов, причем e^x часто обозначается exp x. В силу этого определения $\ln e^x = x$, $\exp \ln x = x$.

Именно в рамках этой цепи справедливо общее свойство логарифмов

$$\ln(x \oplus_n y) = \ln(x) \oplus_{n-1} \ln(y).$$

При этом цепь определяется следующими соотношениями:

– для $n = 0$ $x \oplus_0 y = x + y$,

так что, в отличие от [1], обычное сложение является операцией не первой, а нулевой ступени;

– для $n \le 0$ $x \oplus_{n-1} y = \ln(e^x \oplus_n e^y)$;

– для $n \geq 0$ $x \oplus_{n+1} y = \exp(\ln x \oplus_n \ln y)$.

В силу последнего определения при $n = 0$

$$x \oplus_1 y = \exp(\ln x \oplus_0 \ln y) = \exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x \cdot y) = x \cdot y$$

оказывается обычным умножением – операцией не второй, а первой ступени в отличие от [1]; рассмотренная в [1] операция третьей ступени оказывается операцией второй ступени

$$x \oplus_2 y = \exp(\ln x \oplus_1 \ln y) = \exp(\ln x \cdot \ln y) = e^{\ln x \cdot \ln y} = \left(e^{\ln x}\right)^{\ln y} = x^{\ln y} = y^{\ln x}.$$

Теперь:

$\ln(x \oplus_1 y) = \ln(x \cdot y) = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) = \ln x + \ln y$ – общеизвестное свойство;

$$\ln(x \oplus_2 y) = \ln e^{\ln x \cdot \ln y} = \ln x \cdot \ln y,$$

что дает ответ на второй вопрос;

если же положить в первом определении $n = 0$, $e^x = u$, $x = \ln u$, $e^y = v$, $y = \ln v$, то

$$\ln(u \oplus_0 v) = \ln(u + v) = \ln u \oplus_{-1} \ln v,$$

что дает ответ на первый вопрос – ответ, совпадающий с указанным в [1].

Поскольку мы столкнулись с «нестандартными» числовыми операциями, мне стало интересно, образуют ли пары этих операций числовые поля. Для того, чтобы узнать это, проверим пары операций на аксиомах поля действительных чисел.

Далее используем тройную нумерацию: первое число – индекс первой операции пары, второе – номер операции пары (первая или вторая; в последней аксиоме, связывающей операции, на этом месте стоит 3), третье – номер аксиомы. Кроме того, далее будем обозначать операцию $\oplus_{-1}$ знаком $\oplus$, без какого-либо индекса.

Вот всем известная пара операций, обычное сложение и обычное умножение <$\oplus_0$; $\oplus_1$>, удовлетворяющая аксиомам числового поля – именно для них были впервые сформулированы эти аксиомы:

0.1.1. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность) +

0.1.2. $a+0=0+a=a$ (существование нейтрального элемента) +

0.1.3. $a+b=0$ (существование противоположного элемента: b = -a) +

0.1.4. $a+b=b+a$ (коммутативность) +

0.2.1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность) +

0.2.2. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование нейтрального элемента) +

0.2.3. $a \cdot b = 1$ (существование обратного элемента: b = 1/a) +

0.2.4. $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность) +

0.3.1. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (дистрибутивность) +

Теперь делаем то же с парой <$\oplus_{-1}$; $\oplus_0$>, когда сложение необычное, а роль умножения играет обычное сложение:

-1.1.1. (a⊕b)⊕c = a(b⊕c) (ассоциативность) +

-1.1.2. -∞⊕a = a⊕-∞ = a (существование нейтрального элемента) +

-1.1.3. a⊕b = -∞ (существование противоположного элемента) -

-1.1.4. a⊕b = b⊕a (коммутативность) +

-1.2.1. (a + b) + c = a + (b + c) (ассоциативность) +

-1.2.2.(a + 0) = (0 + a) = a (существование нейтрального элемента) +

-1.2.3. a + b = 0 (существование обратного элемента: b = -a) +

-1.2.4. a + b = b + a (коммутативность) +

-1.3.1. a⊕b + c = (a + c)⊕(b + c) (дистрибутивность) +

Здесь мы видим, что аксиома -1.1.3. не выполняется, отсюда делаем вывод, что множество чисел с этими операциями поля не образует – отсутствует противоположный элемент; в этом случае говорят о полуполе.

Третья пара операций <$\oplus_1$; $\oplus_2$>, роль сложения играет обычное умножение, а умножение необычное:

1.1.1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность) +

1.1.2. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование нейтрального элемента) +

1.1.3. $a \cdot b = 1$ (существование противоположного элемента: b = 1/a) +

1.1.4. $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность) +

1.2.1. $(a^{\ln b})^{\ln c} = a^{\ln\left(b^{\ln c}\right)}$ (ассоциативность) +

1.2.2. $e^{\ln a} = a^{\ln e} = a$ (существование нейтрального элемента) +

1.2.3. $a^{\ln b} = e$ (существование обратного элемента, $b = e^{1/\ln a}$) +

1.2.4. $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ (коммутативность) +

1.3.1. $(a \cdot b)^{\ln c} = (a^{\ln c}) \cdot (b^{\ln c})$ (дистрибутивность) +

Делаем вывод: множество чисел с этой парой операций образует поле.

Проверим справедливость некоторых аксиом:

1.2.1: $(a^{\ln b})^{\ln c} = a^{\ln\left(b^{\ln c}\right)}$

$$a^{\ln b \cdot \ln c} = a^{\ln c \cdot \ln b}$$

1.2.2: $e^{\ln a} = a^{\ln e} = a$

$$a = a^1 = a$$

1.2.3: $a^{\ln b} = e$

$$\ln a^{\ln b} = \ln e$$

$$\ln a \cdot \ln b = 1$$

$$\ln b = 1/\ln a$$

$$b = e^{1/\ln a}$$

$$a^{\ln(e^{1/\ln a})} = a^{1/\ln a \cdot \ln e} = a^{\log_a e} = e$$

1.2.4: $a^{\ln b} = b^{\ln a}$

$$\ln a^{\ln b} = \ln b^{\ln a}$$

$$\ln a \cdot \ln b = \ln b \cdot \ln a$$

Выводы

В ходе работы мы нашли как операцию, выражающую логарифм суммы через логарифмы слагаемых, так и операцию, логарифм которой равен произведению логарифмов операндов. Так же мы узнали, образует ли множество чисел с «нестандартными» парами операций числовые поля. При этом возникла отличная от числового поля структура – полуполе.

Направление дальнейших исследований – проверить аксиомы для других пар операций цепи из [2] и определить возникающие при этом алгебраические структуры.

Список литературы

1. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. – М.: ГУПИ, 1938. – 480 с.

2. Carroll M. The Natural Chain of Binary Arithmetic Operations and Generalized Derivatives [arXiv.org/math.HO/0112050].