АРИФМЕТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ ВИДА *PX*+1

Камальдинов И.Р.

г. Самара, МБОУ «Лицей «Технический» им. С.П. Королева, 8 класс

Научный руководитель: Алякин В.А., г. Самара, канд. физ-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО СНИУ им. С.П. Королева

Одной из самых удивительных современных гипотез является знаменитая гипотеза Коллатца которая утверждает, что в не зависимости от того с какого числа начинается процесс рано или поздно он заканчивается и приводит к единице. В настоящее время эта гипотеза проверена на вычислительных машинах для достаточно больших натуральных чисел. В прессе регулярно появляются сообщения о том, что кто-то доказал гипотезу, но официального подтверждения о доказательстве в общем случае не существует до сих пор.

Термин аттрактор достаточно современный, так как появился только в XX веке. Attract – в переводе с английского «притягивать», это такие состояния системы, в которые она стремится попасть из любого своего состояния. Существуют различные виды аттракторов: точечный аттрактор, предельный цикл, «странный аттрактор». Практическая ценность аттрактора в том, что с помощью них можно описывать поведение сложных систем [1].

Примером арифметического аттрактора является способ вычисления предложенный, например, Р. Бахтизиным [2]. Если взять любое двузначное число, состоящее из не одинаковых чисел, поменять цифры местами, затем найти разность этих чисел, и процесс повторить, то получим число 9. Последовательности как бы «притягиваются» к нему. Например, число 81, отнимем от него число 18 и продолжаем отнимать от результата, его «зеркальное» число: 81 – 18 = 63 – 36 = 27 – 72 = -45 – (- 54) = 9. С трехзначными числами получается число 99, а вот с четырехзначными числами аттракторов будет уже пять.

Еще один пример – числа Капрекара. Число 6174 имеет следующую особенность. Выберем любое четырёхзначное число *n*, больше 1000, в котором не все цифры одинаковы. Расположим цифры сначала в порядке возрастания, затем в порядке убывания. Вычтем из большего меньшее. Повторяя этот процесс с получающимися разностями, не более чем за семь шагов получим число 6174, которое будет затем воспроизводить само себя [3] .

Перейдем к гипотезе Коллатца. Гипотеза Коллатца касается алгоритма построения числовой последовательности, известного как HOTPO (Half Or Triple Plus One – половина или утроенное плюс один). В алгоритме на вход подается некоторое число x_n (n-й член последовательности), а на выходе получается член последовательности с номером $n + 1$. При этом, если x_n четное, то x_{n+1} равно половине x_n. В противном случае $x_{n+1} = 3x_n + 1$.

Легко видеть, что, если $x_n = 1$, то на следующем шаге мы получим 4, а еще за два шага вернемся к единице, то есть, алгоритм зациклится [4].

<u>Гипотеза</u>. Вне зависимости от того, с какого числа мы начинаем, рано или поздно в нашей последовательности встретится единица и алгоритм сведется к простому циклу (зациклится). (1937 г., Лотар Коллатц).

Как заметил по этому поводу великий американский математик венгерского происхождения Пол Эрдёш, современная математика не имеет еще аппарата для доказательства гипотезы Коллатца и это показывает, что тема работы является актуальной.

За годы изучения задачи было установлено, что гипотеза Коллатца связана с решением разного рода задач из теории чисел, фрактальной геометрии и других областей математики.

В этой работе мы вводим целый класс арифметических аттракторов, определение которых основано на тех же принципах, что определение аттрактора Коллатца.

<u>Определение.</u> Пусть $p \geq 2$- фиксированное натуральное число. Берем любое натуральное число. Если оно составное, то делим его на наименьший делитель, а если простое, то умножаем на p и прибавляем 1 (получаем $px + 1$). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее.

Число, получающееся в результате применения этих операций при данном p, будем называть p-аттрактором.

Например, пусть $p = 2$. Для числа $x = 7$ имеем: 7→ 15→ 5→ 11→ 23→ 47→ 95→ 19→ 39→ 13→ 27→ 9→ 3. Для числа $x = 34$ имеем: 34→ 17→ 35→ 7→ …→ 3. Для числа $x = 41$ имеем: 41→ 83→ 167→ 335→ 67→ 135→ 27→ 9 → 3. Итак, 2-аттрактор, видимо, равен 3. Эти вычисления позволяют нам сформулировать гипотезу, подтверждение которой требует дополнительных исследований.

Проведем расчеты с помощью электронных таблиц, построчного для каждого числа, вводя формулы и анализируя результаты. Так как по определению составное число делим на его наименьший делитель, пока не получим простое, то вычисления достаточно проводить только для простых чисел. Для начала исследования мы выбрали последовательность простых чисел, меньших 100. Результаты вычислений представим на рисунке 1. В таблице применено два правила для условного форматирования:

- заливка ячейки желтым цветом, когда значение равно 3;

- выделение красным цветом шрифта, если значения повторяющиеся.

Все вычисления цепочек значений для простых чисел, меньших 100 проведены полностью, для чисел до 503 полные цепочки не вычислялись, так как ясно, что достаточно получить число, встречающееся в ранее вычисленных последовательностях, что дает цепочку, проводящую к числу 3, как показано на рисунке 2. Желтым цветом выделены ячейки с простыми числами больше 503, для которых также уже ясен аттрактор. Таким образом, можем утверждать, что 2аттрактор равен, по-видимому, трем. Максимальное число, получившееся в наших вычислениях – 5759, максимальное число шагов в цепочке вычислений – 22. Для наглядного отображения значений вычислений построим цепочки вычислений при простых числах 2, 3, 5, 7 и 11, как показано на рисунке 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	2	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3											
2	3	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3									
3	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3												
4	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3										
5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3													
6	13	27	9	3																			
7	17	35	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3								
8	19	39	13	27	9	3																	
9	23	47	95	19	39	13	27	9	3														
10	29	59	119	17	35	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3					
11	31	63	21	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3							
12	37	75	25	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3									
13	41	83	167	335	67	135	45	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3				
14	43	87	29	59	119	17	35	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3			
15	47	95	19	39	13	27	9	3															
16	53	107	215	43	87	29	59	119	17	35	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3
17	59	119	17	35	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3						
18	61	123	41	83	167	335	67	135	45	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3		
19	67	135	45	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3								
20	71	143	13	27	9	3																	
21	73	147	49	7	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3							
22	79	159	33	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3										
23	83	167	335	67	135	45	15	5	11	23	47	95	19	39	13	27	9	3					
24	89	179	359	719	1439	2879	5759	443	887	1775	355	71	143	13	27	9	3						
25	97	195	65	13	27	9	3																

Рис. 1. Последовательность $px + 1$ для $p = 2$ и при простых $x < 100$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
26	101	203	29				233	467	935	187	17			383	767			
27	103	207	69	23			239	479	959	137				389	779	41		
28	107	215					241	483	161	23				397	795	265	53	
29	109	219	73				251	503	1007	53				401	803	73		
30	113	227	455	91	13		257	515	103					409	819	273	91	
31	127	255	85	17			263	527						419	839	1679	73	
32	131	263	527	31			269	539	77	11				421	843	281		
33	137	275	55	11			271	543	181					431	863	1727	157	
34	139	279	93	31			277	555	185	37				433	867	289	17	
35	149	299	23				281	563	1127	161	23			439	879	293		
36	151	303	101				283	567	189	63	21	7		443	887			
37	157	315	105	35			293	587	1175	235	47			449	899	31		
38	163	327	109				307	615	205	41				457	915	305	61	
39	167	335					311	623	89					461	923	71		
40	173	347	695	139			313	627	209	19				463	927	309	103	
41	179	359					317	635	127					467	935			
42	181	363	121	11			331	663	221	17				479	959			
43	191	383	767	59			337	675	225	75				487	975	325	65	
44	193	387	129	43			347	695						491	983	1967	281	
45	197	395	79				349	699	233					499	999	333	111	37
46	199	399	133	19			353	707	101					503	1007			
47	211	423	141	47			359	719										
48	223	447	149				367	735	147									
49	227	455					373	747	249	83								
50	229	459	153	51	17		379	759	253	23								

p=2 p=3 p=4 p=5 p=6 p=7 p=8 p=9 p=10

Рис. 2. Последовательность $px + 1$ для $p = 2$ и простых x от 100 до 503

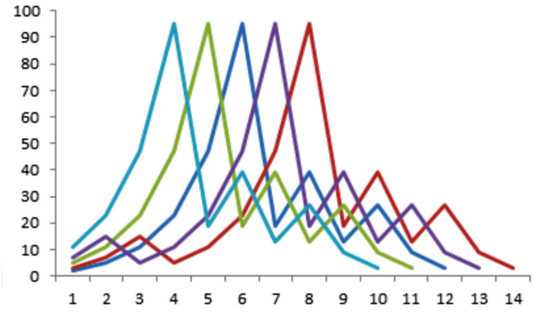


Рис. 3. График аттракторов при p = 2 и простых числах 2, 3, 5, 7 и 11

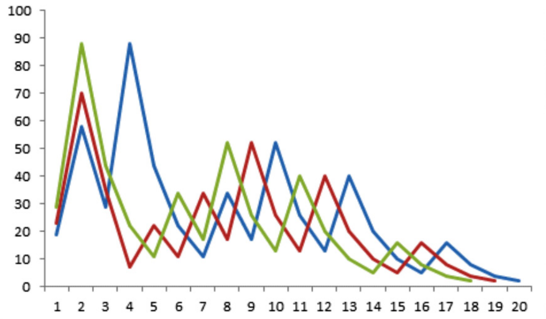
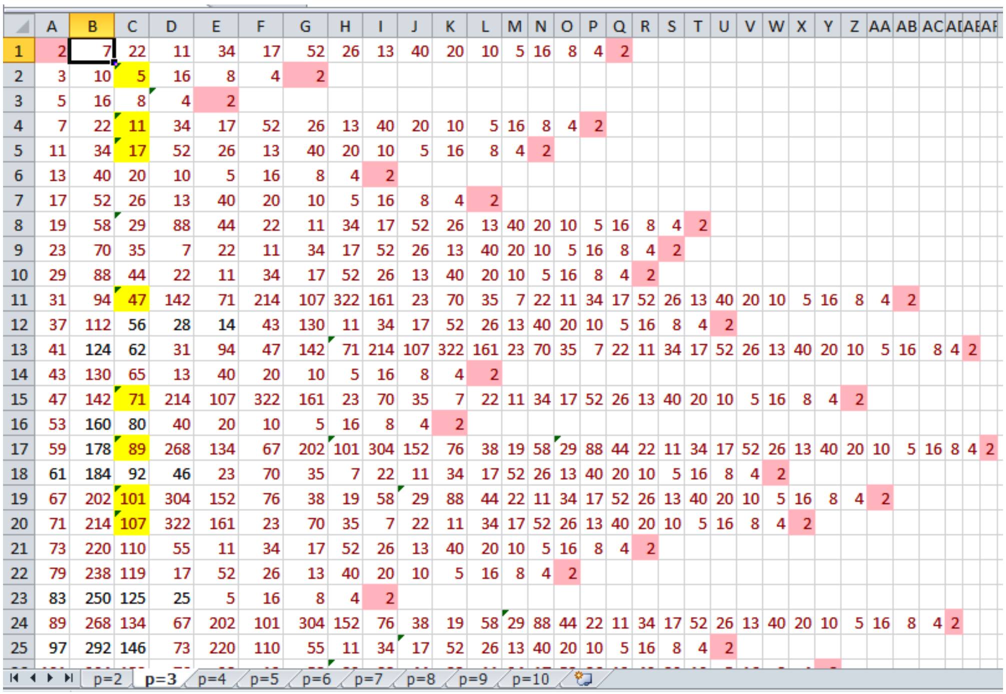
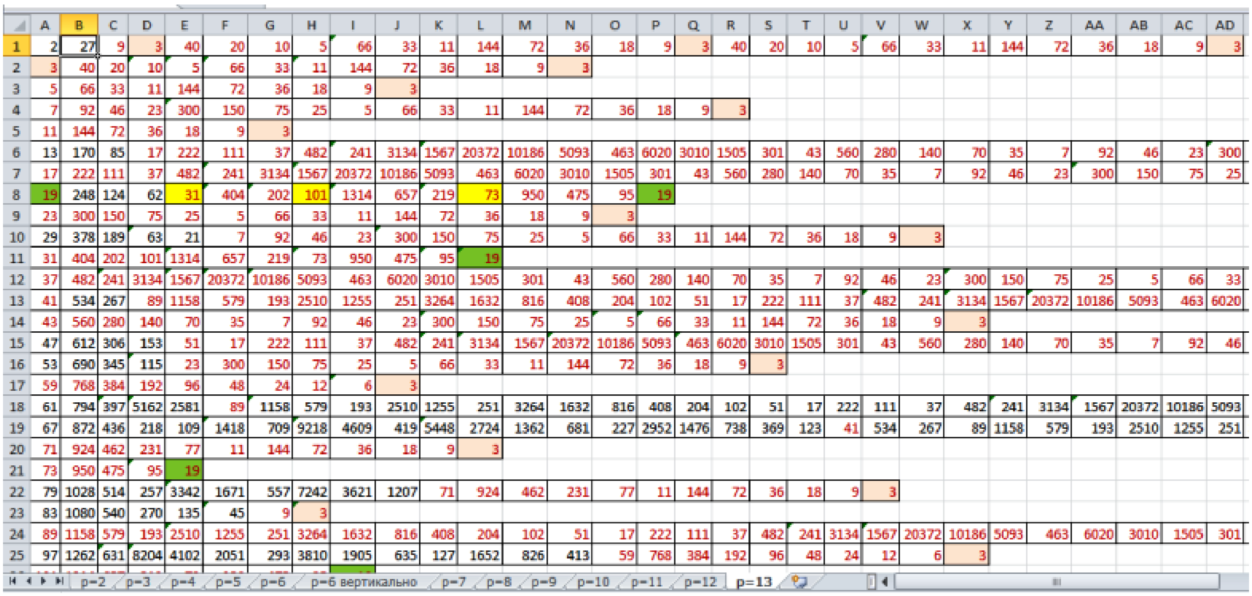


Рис. 4. Кривые аттрактора для p = 3 при простых числах 19, 23 и 29



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	2	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2															
2	3	10	5	16	8	4	2																									
3	5	16	8	4	2																											
4	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2																
5	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2																		
6	13	40	20	10	5	16	8	4	2																							
7	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2																				
8	19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2												
9	23	70	35	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2													
10	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2														
11	31	94	47	142	71	214	107	322	161	23	70	35	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2				
12	37	112	56	28	14	43	130	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2											
13	41	124	62	31	94	47	142	71	214	107	322	161	23	70	35	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	
14	43	130	65	13	40	20	10	5	16	8	4	2																				
15	47	142	71	214	107	322	161	23	70	35	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2						
16	53	160	80	40	20	10	5	16	8	4	2																					
17	59	178	89	268	134	67	202	101	304	152	76	38	19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2
18	61	184	92	46	23	70	35	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2									
19	67	202	101	304	152	76	38	19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2					
20	71	214	107	322	161	23	70	35	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2								
21	73	220	110	55	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2														
22	79	238	119	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2																	
23	83	250	125	25	5	16	8	4	2																							
24	89	268	134	67	202	101	304	152	76	38	19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2		
25	97	292	146	73	220	110	55	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2											

Рис. 5. Последовательность px + 1 для p = 3 при простых x < 100



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
1	2	27	9	3	40	20	10	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3	40	20	10	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3
2	3	40	20	10	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3																
3	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3																				
4	7	92	46	23	300	150	75	25	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3												
5	11	144	72	36	18	9	3																							
6	13	170	85	17	222	111	37	482	241	3134	1567	20372	10186	5093	463	6020	3010	1505	301	43	560	280	140	70	35	7	92	46	23	300
7	17	222	111	37	482	241	3134	1567	20372	10186	5093	463	6020	3010	1505	301	43	560	280	140	70	35	7	92	46	23	300	150	75	25
8	19	248	124	62	31	404	202	101	1314	657	219	73	950	475	95	19														
9	23	300	150	75	25	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3															
10	29	378	189	63	21	7	92	46	23	300	150	75	25	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3							
11	31	404	202	101	1314	657	219	73	950	475	95	19																		
12	37	482	241	3134	1567	20372	10186	5093	463	6020	3010	1505	301	43	560	280	140	70	35	7	92	46	23	300	150	75	25	5	66	33
13	41	534	267	89	1158	579	193	2510	1255	251	3264	1632	816	408	204	102	51	17	222	111	37	482	241	3134	1567	20372	10186	5093	463	6020
14	43	560	280	140	70	35	7	92	46	23	300	150	75	25	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3						
15	47	612	306	153	51	17	222	111	37	482	241	3134	1567	20372	10186	5093	463	6020	3010	1505	301	43	560	280	140	70	35	7	92	46
16	53	690	345	115	23	300	150	75	25	5	66	33	11	144	72	36	18	9	3											
17	59	768	384	192	96	48	24	12	6	3																				
18	61	794	397	5162	2581	89	1158	579	193	2510	1255	251	3264	1632	816	408	204	102	51	17	222	111	37	482	241	3134	1567	20372	10186	5093
19	67	872	436	218	109	1418	709	9218	4609	419	5448	2724	1362	681	227	2952	1476	738	369	123	41	534	267	89	1158	579	193	2510	1255	251
20	71	924	462	231	77	11	144	72	36	18	9	3																		
21	73	950	475	95	19																									
22	79	1028	514	257	3342	1671	557	7242	3621	1207	71	924	462	231	77	11	144	72	36	18	9	3								
23	83	1080	540	270	135	45	9	3																						
24	89	1158	579	193	2510	1255	251	3264	1632	816	408	204	102	51	17	222	111	37	482	241	3134	1567	20372	10186	5093	463	6020	3010	1505	301
25	97	1262	631	8204	4102	2051	293	3810	1905	635	127	1652	826	413	59	768	384	192	96	48	24	12	6	3						

Рис. 6. Последовательность px + 1 для p = 13 при простых x < 100

Проведем вычисления при других значениях p. Пусть p =3, вычисления показывают, что 3аттрактор видимо равен 2. Рассмотрим график кривых для р = 3. Для наглядности оставим только три числа 19, 23, 29 (рисунок 4). Результаты вычислений показаны на рисунке 5. Желтым цветом выделены ячейки с простыми числами, большими по значению, чем исходное простое число последовательности, которое говорит о том, что для него предположение также верно. Самая длинная цепочка вычислений из числа 59 и равна 31-шагу. Максимальное значение в цепочке вычислений – 322.

Виду ограниченности объема статьи дальнейшие вычисления приведем без иллюстраций.

Пусть p = 4, вычисления показывают, что 4аттрактор видимо равен 5. Самая длинная цепочка вычислений из числа 83 и равна 27-шагам. Максимальное достигнутое значение в цепочке вычислений – 7013.

Пусть p = 5. Заметим, что 5аттрактор видимо равен двум. Самая длинная цепочка вычислений получилась для чисел 47 и 71 и равна 29-шагам. Максимальное число, полученное в цепочке вычислений – 1116.

Пусть p = 6. Проведем аналогичные вычисления. Для простых чисел меньших 47, 6аттрактор равен 13. Для простого числа 47 мы возвращаемся снова в 47. Возврат в 47 происходит и для простого числа 89. При вычислениях из простых чисел 47 и 89 в цепочках участвовал еще целый ряд простых чисел, таких как 107, 227, 283 и другие. Это говорит о том, что для них также аттрактором будет число 47. Можно утверждать, что при p = 6 мы имеем два аттрактора – 13 и 47. Самая длинная цепочка вычислений получилась для числа 13 и равна 36-шагам. Максимальное число, достигнутое в цепочках вычислений равно – 88099.

Пусть p = 7. Проведем аналогичные вычисления в электронной таблице. Получим, что аттрактором будет число 3. Самая длинная цепочка вычислений получилась для числа 53 и равна 35-шагам. Максимальное число, достигнутое в цепочках вычислений равно 1940.

Пусть p = 8. Получим, что аттрактором будет число 11. Самая длинная цепочка вычислений получилась для числа 71 и равна 45-шагам. Максимальное число, достигнутое в цепочках вычислений – 49065.

При р = 9 получаем два аттрактора – 13 и 37. Получаем 26 шагов в цепочке вычисления для числа 31 (аттрактор – 13) и 32 шага в цепочке вычисления для числа 9 (аттрактор – 37). Максимальное число, достигнутое в цепочках вычислений равно 3610.

При р = 10 на 58 шаге повторяется число 43 при вычислении от числа два. Можно предположить, что 10-аттрактор равен 43. Максимальное количество – 42 шага в цепочке вычисления для числа 41. Максимальное число, достигнутое в цепочках вычислений равно 159711.

Для р = 11 аттрактор по-видимому равен 17. Максимальное количество шагов в цепочке вычислений – 44, из числа 71. Максимальное число в вычислениях – 7052.

Подведем итоги вычислений в таблице. Для каждого р рассмотрим pаттрактор, максимальное количестве шагов в цепочке вычислений и полученное максимальное число. Результаты представлены в таблице.

Сводная таблица для р-аттракторов

№ п/п	р	р-аттрактор	Максимальное количество шагов	Максимальное число в цепочке
	2	3	22	5759
	3	2	31	322
	4	5	27	17013
	5	2	29	1116
	6	13, 47	36 и 20	88099
	7	3	35	1940
	8	11	44	49065
	9	13, 37	26 и 32	3610
	10	43	42	159711
	11	17	44	7052

Нерешенные задачи и гипотеза

Гипотеза. Предполагаем, что для простых значений р числовая последовательность $px + 1$ имеет точно один аттрактор, для составных значений р это необязательно.

Продолжим вычисления для простого р = 13. Вычислим последовательности для простых значений x < 100 при p = 13. Результаты вычислений представлены на рисунке 6. Как видно из рисунка мы имеем два аттрактора – 3 и 19. Самую длинную цепочку вычислений получаем из числа 67 и она составляет 76 шагов. Максимальное число – 20372.

Как видим вычисления для р = 13 показывают, что наша гипотеза неверна и требуются дальнейшие исследования.

Заключение

В данном исследовании мы рассмотрели новый вид последовательности, вычисление членов которого приводит к зацикливанию.

Математическая новизна результатов работы заключается в самой новой конструкции серии арифметических аттракторов. Несмотря на отсутствие теорем в этом исследовании, эта конструкция представляет интерес, т.к. кажется на первый взгляд более простой, чем гипотеза Коллатца.

Мы выдвинули гипотезу, что единственный аттрактор возможен при простом значении p. Когда мы продолжили вычисления при p = 13 оказалось, что при этом p имеются два аттрактора – 3 и 19. А именно, при вычислении из простых чисел x = 2, 3, 5, …, 17 мы приходим к 3, а при x = 19, 31, 73, 101 мы получаем 19. Не ясно для вычисленных значений p также ведут себя последовательности или при больших значениях x появляются еще аттракторы. Также пока не ясно существует ли еще простое p при котором получаем несколько аттракторов. Также не ясно существуют ли p, при которых получается больше двух аттракторов.

Нерешенные задачи:

1. Доказать, что для любого *p*, аттрактор возможно состоящий из нескольких точек, существует.
2. Найти все значения *p*, при которых аттрактор состоит из одной точки.

Эти задачи пока не решены. В своё оправдание могу отметить, что гипотеза Коллатца несмотря на усилия мировых математиков до сих пор не доказана. Для разрешения поставленных вопросов необходимо продолжить наши вычисления для других p. Необходимо написать программу для вычислений на компьютере, так как дальнейшие вычисления достаточно трудоёмкие. Доказательство выдвинутых гипотез является направлением дальнейших исследований.

Список литературы

1. Аттрактор системы. [Электронный ресурс] URL: http://vikent.ru/enc/979/ (дата обращения: 03.01.2017).

2. Бахтизин, Р. Арифметические аттракторы / Р. Бахтизин, К. Штукатуров, – Наука и жизнь, 2009, – №9.

3. Постоянная Капрекара. [Электронный ресурс] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki / Постоян-ная _Капрекара (дата обращения: 18.01.2017).

4. Гипотеза Коллатца. [Электронный ресурс] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ Гипотеза_Коллатца (дата обращения: 18.10.2016).

5. Виноградов, И. М. Основы теории чисел. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2003. – 176 с.

6. Сизый, С.В. Лекции по теории чисел. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 192 с.