МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ИГРЫ ХАОСА

Гернер Б.А.

г. Пятигорск, МБОУ СОШ № 12, 6 класс

Научный руководитель: Евстратова С.И., учитель математики
г. Пятигорск, МБОУ СОШ № 12, г. Пятигорск, МБОУ СОШ № 12

Мы живём в стремительно меняющемся мире. Совершаются открытия и в одной из самых «древних» наук - математике. Меня заинтересовали такие новые (по историческим меркам) объекты - фракталы. О фракталах написано множество научных монографий, статей в интернете. Изображения фракталов поражают своим разнообразием и удивительной красотой.

Теорию фрактальной геометрии разработал Бенуа́ Мандельбро́т — французский и американский математик.

На уроках математики в школе мы изучаем квадраты, треугольники, окружности и т. д. Однако в природе чаще всего объекты «неправильные» - шероховатые, зазубренные. По этому поводу Бенуа Мандельброт в своей книге «Фрактальная геометрия природы» [1] пишет:

«Почему геометрию часто называют «холодной» и «сухой»? Одна из причин заключается в её неприспособленности описать форму облака, горы, береговой линии или дерева. Облака – не сферы, горы – не конусы, береговые линии – не окружности, древесная кора не гладкая, а молния распространяется не по прямой. Природа обладает не просто большей сложностью, а сложностью совершенно иного уровня.»

С другой стороны, по мнению Альберта Эйнштейна, «природа – это сочетание самых простых математических идей».

Среди многочисленных алгоритмов построения фракталов меня заинтересовал способ, называемый «игра хаоса». В литературе [2] описано построения треугольника Серпинского на основе этого метода. Реализовать его вручную невозможно, не смотря на простоту применяемых формул. Большое количество расчётов и создание изображений стало возможным благодаря использованию программы Mathcad - доступного и удобного средства математических расчётов.

Далее стали возникать вопросы: можно ли получить другие фракталы с помощью «игры хаоса» и как влияет на результаты изменение параметров в применяемой формуле?

Основной гипотезой работы стало предположение о том, что алгоритм «игра хаоса», в основе которого лежит случайность, всегда приводит к появлению упорядоченных структур – закономерности.

Применение компьютерных программ, что само по себе актуально в наше время, открыло простор для собственных экспериментов и исследований, что и определило выбор данной темы. Знакомство с фракталами позволило взглянуть на сухие математические формулы с новой точки зрения.

Цель работы – создание фракталов на основе игры хаоса.

Задачи:

1) изучить понятие «фрактал»;
2) узнать методы построения фракталов;
3) научиться создавать фракталы с помощью программы Mathcad;
4) Провести ряд экспериментов по созданию фракталов на основе алгоритма «игра хаоса»
5) определить области применения фракталов с информатикой и математикой.

Развитие представления о фракталах

Фракталы известны уже более века, хорошо изучены и применяются в самых различных областях жизни. Обычно так называют геометрическую фигуру, которая является самоподобной, то есть при увеличении или уменьшении имеет одно и то же строение.

Это свойство проявляется у дерева, берега моря, облака, кровеносных сосудов. От ветки, как и от ствола дерева, отходят отростки поменьше, от них — еще меньшие, и т. д., то есть ветка подобна всему дереву.

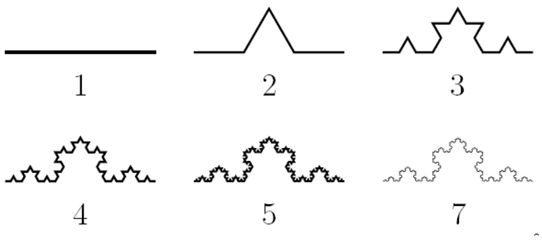
Похожим образом устроена и кровеносная система: от артерий отходят артериолы, а от них — мельчайшие капилляры, по которым кислород поступает в органы и ткани. Если посмотреть на космические снимки морского побережья, то мы увидим заливы и полуострова. Взглянем на него же с высоты птичьего полета: нам будут видны бухты и мысы. Теперь представим себе, что мы стоим на пляже и смотрим себе под ноги: всегда найдутся камешки, которые дальше выдаются в воду, чем остальные. То есть береговая линия при увеличении масштаба остается похожей на саму себя. Это свойство объектов Бенуа Мандельброт назвал фрактальностью, а сами такие объекты —

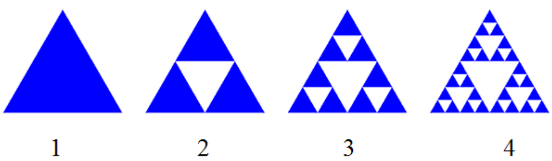
фракталами (от латинского fractus — изломанный). Самый распространённый способ построения фракталов использует это свойство: чтобы построить фрактал нужно несколько раз применить одно и то же действие - «сломать» определённым образом линию. Результат таких действий радует своей красотой, но предсказуем.

Меня же заинтересовал совсем иной подход к построению фракталов - так называемая игра хаоса. Это приём, благодаря которому фрактал возникает в результате случайного блуждания точек.

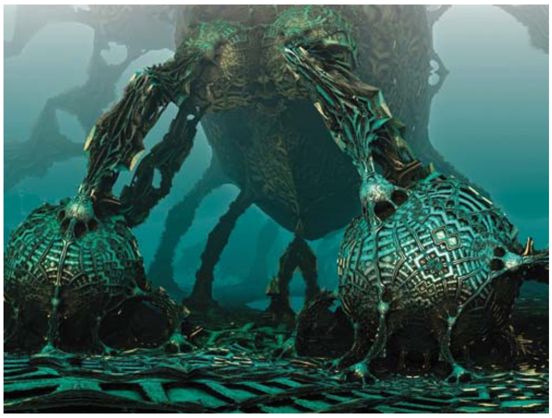
В 1982 году вышла книга Мандельброта «Фрактальная геометрия природы», в которой автор собрал и систематизировал практически всю имевшуюся на тот момент информацию о фракталах и в доступной форме изложил ее. Основной упор в своей книге Мандельброт сделал не на сложные математические формулы, а на геометрическую интуицию читателей.

Из рукотворных, математических кварталов наиболее известны кривая или снежинка Хельге фон Коха, треугольник или решето Серпинского, и другие, строящиеся с помощью повторения одного и того же действия. На следующих рисунках показано построение снежинки Коха и салфетки Серпинского.





Когда персональные компьютеры стали достаточно мощными то появилось даже целое направление в искусстве — фрактальная живопись, причем заниматься ею мог практически любой пользователь компьютера. Сейчас в интернете можно легко найти множество сайтов, посвященных этой теме. Результаты, которые можно получить с помощью фракталов, поражают воображение даже самых искушенных ценителей компьютерного искусства. Изображения, создаваемые с помощью программ-фракталогенераторов, порой содержат совершенно фантастические и необычные пейзажи, как на следующем рисунке.



И наоборот, с помощью фрактальной графики можно с удивительной точностью изобразить то, что мы видим в окружающем нас мире. В природе фрактальными свойствами обладают многие объекты, например: кроны деревьев, цветная капуста, облака, кровеносная система человека и животных, кристаллы, снежинки.

Один из таких природных фракталов (капуста Романеску) изображен на рисунке.

При создании реальных пейзажей в мультфильмах уже давно применяют фракталы.

Помимо фрактальной живописи фракталы используются в теории информации для сжатия графических данных. В радиоэлектронике в последнее десятилетие начали выпускать антенны, имеющие фрактальную форму. А экономисты используют фракталы для описания изменений курсов валют и ценных бумаг.

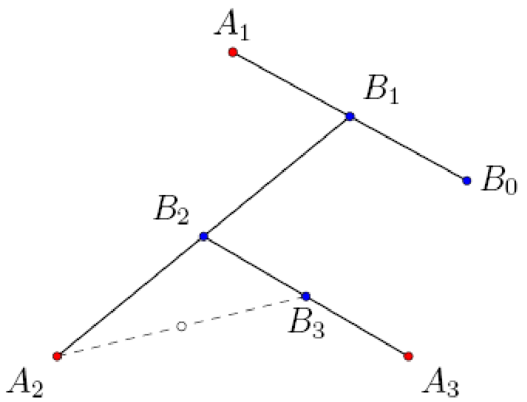
Исследования в области фракталов получили широкое применение в таком важном разделе медицины как кардиология.

Похоже, куда не кинешь взгляд, повсюду фракталы: облака и деревья, микро и макрокосмос, да и мы сами тоже - носители фракталов. Возможно, есть универсальный закон, объясняющий такое единство.

Построение фракталов на основе игры хаоса

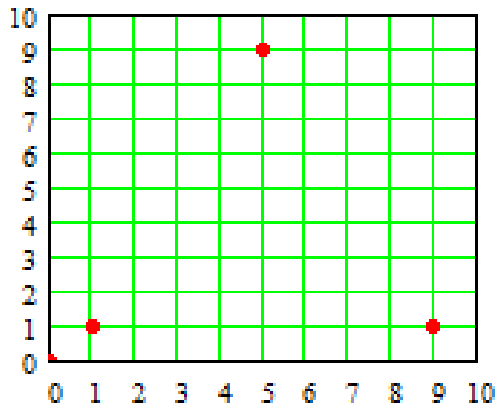
Из статьи «Треугольник Серпинского» на сайте elementy.ru - Элементы большой науки - мы узнали, что треугольник Серпинского можно создать не только повторными удалениями треугольников из треугольников, как показано выше. Оказывается, треугольник Серпинского получается в результате случайного блуждания точки на плоскости. Этот способ называется «игрой Хаоса». Приводим здесь описание «игры», данное в указанной статье.

На плоскости зафиксирован правильный треугольник $A_1A_2A_3$. Отмечают любую начальную точку B_0. Затем случайным образом выбирают одну из трех вершин треугольника и отмечают точку B_1 — середину отрезка с концами в этой вершине и в B_0 (на рисунке справа случайно выбралась вершина A_1).



То же самое повторяют с точкой B_1, чтобы получить B_2. Потом получают точки B_3, B_4, и т. д. Важно, чтобы точка «прыгала» случайным образом, то есть чтобы каждый раз вершина треугольника выбиралась случайно, независимо от того, что было выбрано в предыдущие шаги. Удивительно, что если отмечать точки из последовательности B_i, то вскоре начнет проступать треугольник Серпинского.

В статье также было сказано, что подобным образом можно получить и некоторые другие фракталы. Это и стало целью нашего исследования. Мы начали с построения треугольника Серпинского указанным в статье способом. Поскольку выполнить большое количество повторных построений вручную невозможно, мы использовали программу Mathcad. С этой программой мы были знакомы и ранее, использовали её как удобный калькулятор. Теперь пришлось изучить возможности создавать изображения. Это оказалось несложно. Обозначим координаты вершин треугольника $A_1(X_1, Y_1)$, $A_2(X_2, Y_2)$ $A_3(X_3, Y_3)$. Строим систему координат и отмечаем в ней вершины треугольника $A_1A_2A_3$.



$X_1 := 1$ $X_2 := 9$ $X_3 := 5$

$Y_1 := 1$ $Y_2 := 1$ $Y_3 := 9$

Затем нам нужно, чтобы компьютер сам случайно выбрал произвольное положение точки B_0. Для этого в Mathcad применяется функция rnd(x). Мы использовали rnd(10). Это означает, что координаты для точки B_0 будут случайные в пределах от 0 до 10.

Для построения точки B_1 нужно найти середину между точкой B_0 и случайно выбранной вершиной треугольника $A_1A_2A_3$.

Для этого нужно решить две проблемы:

1) как каждый раз случайным образом (беспорядочно, хаотически) выбирать вершину треугольника $A_1A_2A_3$;

2) как вычислить координаты точки B_1 - середины отрезка с вершинами B_0 и случайной вершины треугольника $A_1A_2A_3$.

Для решения первой проблемы представим себе, что мы бросаем игральный кубик, на гранях которого написаны числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, а не 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тогда кубик укажет нам нужную вершину треугольника $A_1A_2A_3$. Такой кубик тоже можно создать в Mathcad с помощью функции rnd(3). Но тогда будут получаться не только числа 1, 2, 3, но и все дроби между этими числами. Чтобы числа получались целыми, возьмём целую часть от rnd(3). В Mathcad это функция floor(x). И ещё нужно добавить 1, так как просто целые части будут получаться 0, 1, 2, а не 1, 2, 3, как нам нужно.

Так мы получим:

kub_1=floor(rnd(3)) - номер вершины треугольника $A_1A_2A_3$ на первом шаге «игры хаоса»;

kub_2=floor(rnd(3)) - номер вершины треугольника $A_1A_2A_3$ на втором шаге «игры хаоса»;

kub_3=floor(rnd(3)) - номер вершины треугольника $A_1A_2A_3$ на третьем шаге «игры хаоса»

и так далее.

Так как «бросать кубик» нам нужно очень много раз, все бросания мы запишем одной формулой:

kub_n=floor(rnd(3)), где n=1, 2, 3,.. N, N - количество точек, которые мы собираемся построить. В Mathcad это выглядит так:

$$N := 500 \quad n := (1 .. N)$$

$$kub_n := \mathrm{floor}(\mathrm{rnd}(3)) + 1$$

$$kub_1 = 3 \quad kub_2 = 1$$

$$kub_3 = 3 \quad kub_4 = 2$$

$$kub_5 = 1 \quad kub_6 = 2$$

Решаем вторую проблему - вычисление координат середины отрезка. Обозначим координаты интересующих нас точек, $B_0(x_0, y_0)$, $B_1(x_1, y_1)$. Формула для вычисления координат середины отрезка проста - это среднее арифметическое координат концов отрезка:

$$x_1 = \frac{x_0 + X_1}{2};\; y_1 = \frac{y_0 + Y_1}{2},$$

если выбрана вершина A_1

$$x_1 = \frac{x_0 + X_2}{2};\; y_1 = \frac{y_0 + Y_2}{2},$$

если выбрана вершина A_2

$$x_1 = \frac{x_0 + X_3}{2};\; y_1 = \frac{y_0 + Y_3}{2},$$

если выбрана вершина A_3

Так мы найдём координаты точки $B_1(x_1, y_1)$, затем аналогично - координаты $B_2(x_2, y_2)$.

$$x_2 = \frac{x_1 + X_1}{2};\; y_2 = \frac{y_1 + Y_1}{2},$$

если выбрана вершина A_1

$$x_2 = \frac{x_1 + X_2}{2};\; y_2 = \frac{y_1 + Y_2}{2},$$

если выбрана вершина A_2

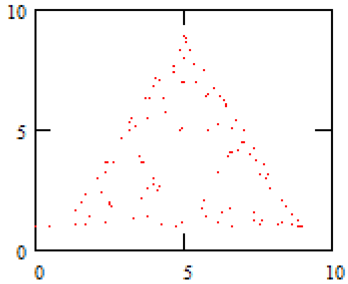
$$x_2 = \frac{x_1 + X_3}{2};\; y_2 = \frac{y_1 + Y_3}{2},$$

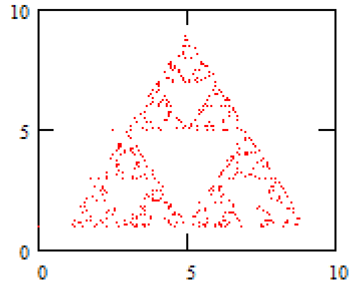
если выбрана вершина A_3

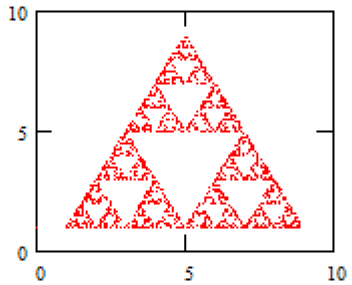
Таким образом, вычисляя координаты очередной точки (с номером n), мы ищем середину между предыдущей точкой (с номером n-1) и той случайной вершиной треугольника $A_1A_2A_3$, которую укажет наш «кубик». В Mathcad это выглядит так:

$$x_n := \frac{x_{n-1} + X_{(kub_n)}}{2} \qquad y_n := \frac{y_{n-1} + Y_{(kub_n)}}{2}$$

Ниже изображено, что получится, если построить 100, 500 и 2000 точек

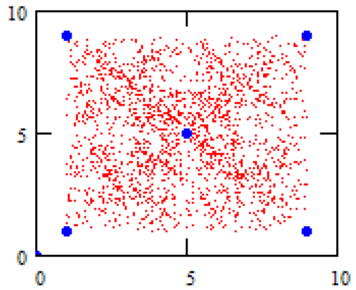






Удивительно, что, несмотря на случайный выбор вершин треугольника, точки в результате располагаются в определенном порядке!

Дальше мы продолжили эксперименты, располагая начальные точки (те, которые будет «выбирать кубик») в вершинах других многоугольников - квадратов, шестиугольников, различных звёзд, но в расположении точек теперь не заметен был порядок.



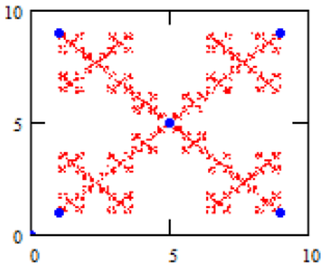
$$X_1 := 1 \quad X_2 := 9 \quad X_3 := 1 \quad X_4 := 9 \quad X_5 := 5$$

$$Y_1 := 1 \quad Y_2 := 1 \quad Y_3 := 9 \quad Y_4 := 9 \quad Y_5 := 5$$

Тогда у нас возникло предположение, что нужно каждую новую точку B_n располагать не посередине между предыдущей B_{n-1} и одной из вершин многоугольника, а «сильнее» притягивать к вершине. Для этого потребовалось познакомиться с новой формулой - деление отрезка в данном отношении. Если, например, новая точка B_n должна оказаться в 2 раза ближе к вершине многоугольника, чем к предыдущей точке B_{n-1}, то её координаты будем вычислять по формуле:

$$x_n := \frac{x_{n-1} + 2 \cdot X_{(kub_n)}}{1+2} \qquad y_n := \frac{y_{n-1} + 2 \cdot Y_{(kub_n)}}{1+2}$$

Ниже изображено, что получилось, если применить эту формулу для квадрата с центральной точкой



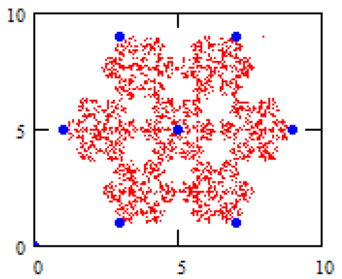
$X_1 := 1 \quad X_2 := 9 \quad X_3 := 1 \quad X_4 := 9 \quad X_5 := 5$

$Y_1 := 1 \quad Y_2 := 1 \quad Y_3 := 9 \quad Y_4 := 9 \quad Y_5 := 5$

$N := 2000 \quad n := 1..N \quad kub_n := \mathrm{floor}(\mathrm{rnd}(5)) + 1$

$$x_n := \frac{x_{n-1} + 2 \cdot X_{(kub_n)}}{1+2} \qquad y_n := \frac{y_{n-1} + 2 \cdot Y_{(kub_n)}}{1+2}$$

Для шестиугольника с центральной точкой по той же формуле получилась очень красивая снежинка!



$X_1 := 1 \quad X_2 := 9 \quad X_3 := 1$

$Y_1 := 1 \quad Y_2 := 1 \quad Y_3 := 9$

$X_4 := 9 \quad X_5 := 5 \quad X_6 := 7 \quad X_7 := 5$

$Y_4 := 9 \quad Y_5 := 5 \quad Y_6 := 1 \quad Y_7 := 5$

$N := 3000 \quad n := 1..N \quad kub_n := \mathrm{floor}(\mathrm{rnd}(7)) + 1$

$$x_n := \frac{x_{n-1} + 2 \cdot X_{(kub_n)}}{1+2} \qquad y_n := \frac{y_{n-1} + 2 \cdot Y_{(kub_n)}}{1+2}$$

Затем у нас возникла идея создать пейзаж из фрактальных фигур.

Для этого потребовались продолжительные многочисленные эксперименты. Мы подбирали расположение начальных точек и «силу притяжения». Больше ничего в наших формулах менять не пришлось.

Так возникли горы.

$X_1 := 1 \quad X_2 := 3 \quad X_3 := 5 \quad X_4 := 7 \quad X_5 := 9$

$X_6 := 10 \quad X_7 := 11 \quad X_8 := 12 \quad X_9 := 13 \quad X_{10} := 14$

$Y_1 := 4 \quad Y_2 := 6 \quad Y_3 := 8 \quad Y_4 := 6 \quad Y_5 := 4$

$Y_6 := 5 \quad Y_7 := 6 \quad Y_8 := 5 \quad Y_9 := 4 \quad Y_{10} := 5$

$X_{11} := 15 \quad X_{12} := 16 \quad X_{13} := 17 \quad X_{14} := 18 \quad X_{15} := 20$

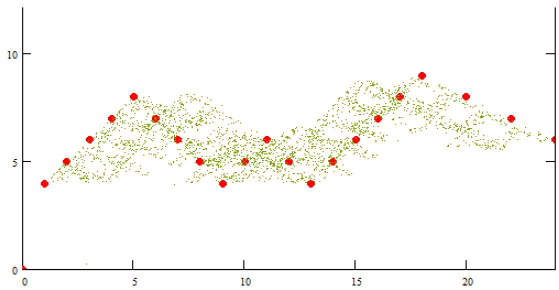
$X_{16} := 22 \quad X_{17} := 24 \quad X_{18} := 4 \quad X_{19} := 2 \quad X_{20} := 6$

$Y_{11} := 6 \quad Y_{12} := 7 \quad Y_{13} := 8 \quad Y_{14} := 9 \quad Y_{15} := 8$

$Y_{16} := 7 \quad Y_{17} := 6 \quad Y_{18} := 7 \quad Y_{19} := 5 \quad Y_{20} := 7$

$N := 3000 \quad n := 1..N \quad kub_n := \mathrm{floor}(\mathrm{rnd}(20)) + 1$

$$x_n := \frac{x_{n-1} + 3 \cdot X_{(kub_n)}}{1+3} \qquad y_n := \frac{y_{n-1} + 3 \cdot Y_{(kub_n)}}{1+3}$$



Затем возникла идея изобразить фрактальную стаю птиц.

$X_1 := 2 \quad X_2 := 4 \quad X_3 := 6 \quad X_4 := 5$

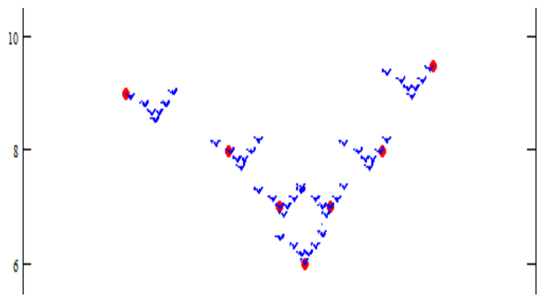
$X_5 := 7 \quad X_6 := 8 \quad X_7 := 5.5$

$Y_1 := 9 \quad Y_2 := 8 \quad Y_3 := 7 \quad Y_4 := 7$

$Y_5 := 8 \quad Y_6 := 9.5 \quad Y_7 := 6$

$N := 5000 \quad n := 1..N \quad kub_n := \mathrm{floor}(\mathrm{rnd}(7)) + 1$

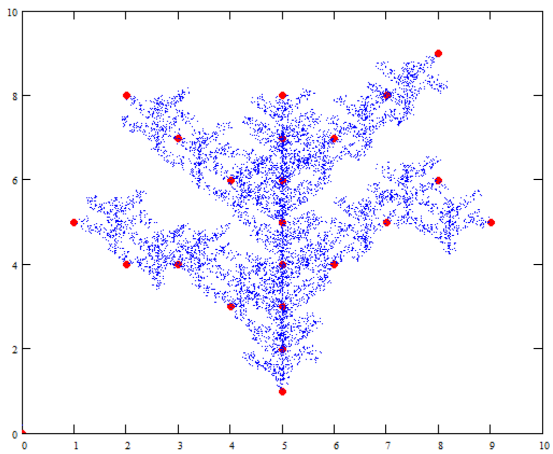
$$x_n := \frac{x_{n-1} + 5 \cdot X_{(kub_n)}}{1+5} \qquad y_n := \frac{y_{n-1} + 5 \cdot Y_{(kub_n)}}{1+5}$$



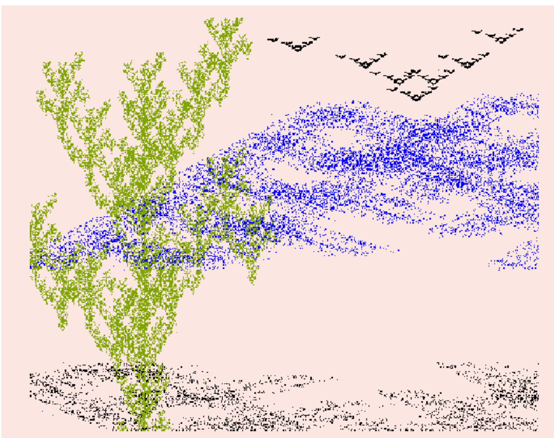
Следующий фрактал изображает дерево.

$$X_1:=5\quad X_2:=5\quad X_3:=4\quad X_4:=5\quad X_5:=2\quad X_6:=3$$
$$X_7:=5\quad X_8:=6\quad X_9:=1\quad X_{10}:=5\quad X_{11}:=7$$
$$Y_1:=1\quad Y_2:=2\quad Y_3:=3\quad Y_4:=3\quad Y_5:=4\quad Y_6:=4$$
$$Y_7:=4\quad Y_8:=4\quad Y_9:=5\quad Y_{10}:=5\quad Y_{11}:=5$$
$$X_{12}:=9\quad X_{13}:=4\quad X_{14}:=5\quad X_{15}:=8\quad X_{16}:=3\quad X_{17}:=5$$
$$X_{18}:=6\quad X_{19}:=2\quad X_{20}:=5\quad X_{21}:=7\quad X_{22}:=8$$
$$Y_{12}:=5\quad Y_{13}:=6\quad Y_{14}:=6\quad Y_{15}:=6\quad Y_{16}:=7\quad Y_{17}:=7$$
$$Y_{18}:=7\quad Y_{19}:=8\quad Y_{20}:=8\quad Y_{21}:=8\quad Y_{22}:=9$$

$$N:=10000\quad n:=1\,..\,N$$
$$kub_n:=\mathrm{floor}(\mathrm{rnd}(22))+1$$
$$x_n:=\frac{x_{n-1}+4\cdot X_{(kub_n)}}{1+4}$$
$$y_n:=\frac{y_{n-1}+4\cdot Y_{(kub_n)}}{1+4}$$



Затем мы всё это разместили на одном рисунке, убрали изображения начальных точек и с помощью средств Mathcad использовали разные цвета для разных объектов и подсветку области.



Создавать новые объекты, менять их было очень интересно и легко:

мы придумывали расположение новых начальных точек;

задавали их координаты (в Mathcad сразу видны результаты);

использовали один и тот же общий закон для построения следующих точек - универсальную формулу

$$x_n:=\frac{x_{n-1}+k\cdot X_{(kub_n)}}{1+k}\qquad y_n:=\frac{y_{n-1}+k\cdot Y_{(kub_n)}}{1+k}$$

число k мы подбирали экспериментально, чтобы рисунок отвечал нашему замыслу (понять эту формулу было непросто, но мы начинали с расчётов вручную, бросали на стол настоящий кубик и вскоре стало ясно, как компьютер производит вычисления по этой формуле);

оценивали на рисунке в Mathcad, что получилось, и повторяли этот процесс, пока не получали нужный результат.

Благодаря этой работе, мы освоили новые для нас возможности программы Mathcad, и это нам очень пригодится в дальнейших исследованиях.

Заключение

В результате работы сделан следующий вывод: случайность и закономерность могут быть удивительным образом связаны. Видимо, в основе этого наблюдения лежит единый довольно простой закон, способный объяснить многие природные явления: образование облаков, растений, живых организмов, космических тел.

В связи с этой универсальностью область применения фракталов по сути не ограничена: от забав до создания инженерных конструкций, новых медицинских технологий и прогнозирования экономических процессов и многого другого.

Познакомиться с фракталами легко, это может сделать любой школьник на уроках информатики и математики, значительно расширяя и дополняя школьную программу.

Но серьёзное изучение их свойств и способов построения относится к различным сложным наукам. И это делает их для нас ещё более интересными, побуждает двигаться вперёд, осваивать новые области знания.

В дальнейшем я продолжу изучение фракталов, в том числе в трёхмерном пространстве, освоив для этого новые компьютерные программы.

Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2002

2. elementy.ru сайт Элементы большой науки

3. Фильм. Фракталы. Чудеса природы.