

РОЛЬ ГЕОМЕТРИИ В ОРНАМЕНТЕ

Куванова М.А., Пивоваров В.А.

МАОУ «Гимназия №1» п. Мулино, 8 «А» класс

Научный руководитель : Дятел О.И., п. Мулино, МАОУ «Гимназия №1»

Человек всегда стремится украшать окружающее его пространство: цветами, колористическими решениями. И каждый раз люди пытаются придумать что-то новое, интересное. Все новое - хорошо забытое старое. Мы предлагаем обратить внимание на давно известное понятие в геометрии — орнамент.

«А что такое орнамент?» - детский вопрос.

Оглядишься, посмотри, как красиво –

Из орнаментов разных узор
 На обоях, ковре. Белый с синим
 На клеёнке штришками «забор»,
 Разрисован и бабушкин фартук,
 На платочках - квадратиков ряд,
 И на мамином сереньком платье
 На кайме ярко стразы горят.
 Кружева на салфетках, накидках
 Составляют цветочный набор,
 А на стёкла зимою налипнет
 Из снежинок и льдинок узор.

Актуальность. Восхищаясь рукотворной красотой орнаментов, воплощенных в предметах декоративно-прикладного искусства, коврах, паркетах, гобеленах, вышивке и даже искусства уличного граффити — мы задумались о роли геометрии в создании этих произведений. Каждому человеку понятны принципы красоты. Но почему-то некоторым людям кажется, что они неспособны эту красоту воспроизвести. Математика может помочь в этом изящном искусстве и желании сделать красоту самому.

Объект исследования: орнаменты и узоры.

Предмет исследования: произведения искусства (картины, паркетные ковры, часы), математика.

Цель исследования: изучение математических закономерностей, связанных с орнаментами и паркетными коврами, а именно ответить на следующие вопросы:

-Какие геометрические преобразования лежат в основе создания таких орнаментов?
 - Как построить измельчающие узоры?

Методы исследования:

- поисковый, аналитический, сравнения, наблюдения

Задачи:

1) Познакомиться с историей возникновения узоров.

2) Применить знания на практике, создав орнамент на основе изученных закономерностей.

3) Показать важность математических закономерностей.

Гипотеза: предполагаем, что роль математики в построении узоров очень велика. Сложность узора зависит от теоретических знаний человека, который рисует его.

Глава 1.1. Геометрия орнамента

Орнамент (от лат. ornamentum — украшение) — это узор, состоящий из повторяющихся, ритмически упорядоченных элементов.

Орнамент предназначен для украшения различных предметов (посуды, мебели, текстильных изделий, оружия) и архитектурных сооружений

Приложение 1. Связанный с поверхностью, которую он украшает и зрительно организует, орнамент, как правило, выявляет и подчеркивает своим построением, формой и цветом архитектурные и конструктивные особенности предмета, природную красоту материала.

В построении орнамента используют главным образом принцип симметрии. Рассматривая разные композиции, легко увидеть, что орнамент можно продолжать в разные стороны, даже если его первоначальная композиция ограничена и замкнута.

В народном творчестве, где орнамент нашел наибольшее распространение, постепенно складывались устойчивые формы и принципы построения орнамента, во многом определившие национальные, художественные традиции разных народов.

Так, в орнаментах Древнего Египта наибольшее распространение нашли растительные мотивы, и среди них особенно часто встречались листья и цветы лотоса. Кажется, что египетский орнамент содержит какую-то тайну. Ведь египтяне так любили тайны. Над загадками их архитектуры и науки и сейчас бьются ученые-египтологи. Когда вы держите книгу обычным образом, то на рисунке вам бросаются в глаза нераспустившиеся бутоны. Но поверните книгу «вверх ногами», и тот же самый орнамент предстанет совсем другим: вы увидите лотос во всей красе, он широко раскинул свои великолепные лепестки, как бы

вознаграждая нас за догадливость и умение видеть. Классическими стали наиболее распространенные древнегреческие орнаменты — меандр и акант - Приложение 1.

Слово «меандр» происходит от названия очень извилистой реки в Малой Азии. Ныне она называется Большой Мендерес. Орнамент меандр как будто повторяет излучины этой прихотливой реки. Акант — это род травянистого растения, распространенного в Средиземноморье. У него большие листья, красиво изогнутые стебли. В обоих этих орнаментах греки предстают перед нами привлекательными учениками природы, которой они поклонялись. Они умели рассказать словами, вылепить из глины, вытесать из мрамора прекрасную сказку про каждый холм, каждую речку, каждый лист.

Не будет преувеличением сказать, что нигде орнаментальное искусство не достигло такого расцвета и совершенного воплощения, как на мусульманском Востоке. Для него характерно сочетание геометрических и растительных мотивов, так как Кораном было запрещено изображение людей и животных.

Впоследствии, распространившись по Европе, этот вид орнамента получил название «арабеска» (от ит. arabesco — арабский). В исламских странах арабеску представлял узор. На первый взгляд мы видим повторения, диктуемые симметрией, но это только самые крупные элементы орнамента - Приложение 1.

Высокого развития орнамент достиг в средневековой Руси. Для русского орнамента характерны как геометрические и растительные формы, так и изображения птиц, зверей, фантастических животных и человеческих фигур. Наиболее ярко русский орнамент выражен в резьбе по дереву и в вышивке. В плоском орнаменте одним из наиболее часто используемых мотивов является так называемая плетенка — различного вида переплетения полосок типа лент, ремней, стеблей цветов - Приложение 1.

По сути, именно это открытие побудило в конце XIX века физиков и математиков подробнее изучить орнаменты (тогда и было дано точное математическое определение орнамента).

Глава 1.2. Геометрия в орнаменте

Анализируя некоторые орнаменты, можно наблюдать примеры применения в них геометрических построений. Например, деление окружности на равные части, сопряжения, применение циклоид, параллельных астроида и завитков.

Изучая орнаменты от самых древних до современных, можно заметить, что с течением времени менялось их содержание, но композиционный строй, его ритмическая

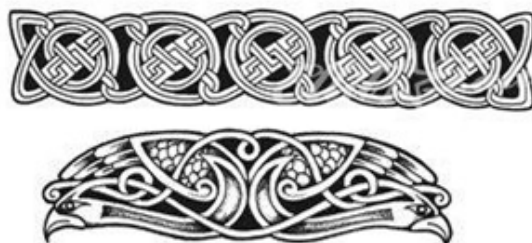
основа оставались неизменными. В композиции орнамента присутствует математическая основа. Особую роль играют симметрия и разбиение плоскости на равные фигуры. Преобладающее большинство орнаментов построено на основе строгой математической логики.

Перечислим виды геометрических орнаментов, ограничиваясь главным и идя от простого к сложному. Приведенные нами примеры немногочисленны, и их легко умножить.

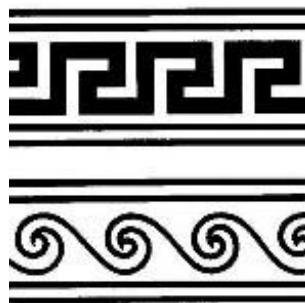
Прежде всего назовем точку, которая мало значит сама по себе, но при повторении дает декоративный эффект, успешно использованный в искусстве Ирана и в китайских изделиях Танского периода.

Затем идет линия или лента, широко применявшаяся для того, чтобы разграничить отдельные мотивы. Линию можно увидеть и в доисторических орнаментах и на греческих вазах (геометрический и классический стили).

Вязь характерна для искусства ислама, однако мы находим ее также в орнаментах самых разных стран. Вязь строится по принципу чередования зеркально - симметричных завитков. Напомним, что мотив плетенки встречается уже в древневосточном и греческом искусстве; в средние века вязь является излюбленным мотивом в книжной миниатюре, в некоторых романских орнаментах.



Меандр - изломанная под прямым углом лента - использовался и на греческих вазах геометрического стиля, и в искусстве Древней Мексики, и на японских тканях. (Получил свое название от извилистой реки Меандр, в Малой Азии). Изгибы волнистых линий представляют собой тот же принцип меандра, только лишенный своей Геометрической четкости.



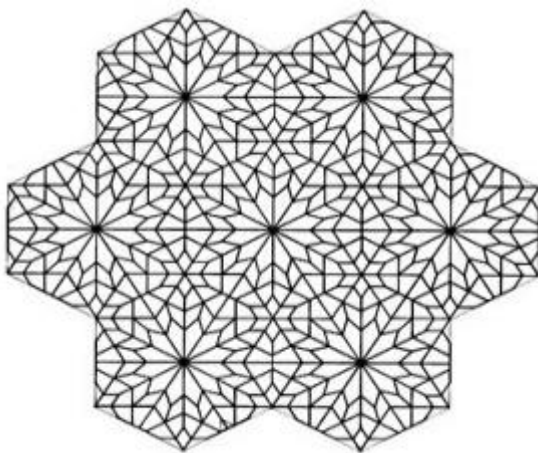
Квадрат, прежде всего, ограничивает поверхности, заполненные мотивами, как мы это видим, например, на кессонированных потолках эпохи Возрождения.



Ромб можно увидеть на множестве доисторической гончарной посуды и на китайских бронзовых изделиях периода Шан; он также служит для ограничения декорируемых поверхностей. То же можно сказать и о шашечном орнаменте, который широко используется в узорах тканей со времен Древнего Египта вплоть до современного искусства.



Треугольник служит орнаментальным мотивом для мозаичных полов и для тканей.



Шестиугольник и восьмиугольник, и их сочетания широко воспроизводились в декоративном искусстве стран ислама.

Среди кривых линий назовем в первую очередь синусоиду, волнообразную ленту, которая встречается как обрамление и в романском, и в китайском искусстве.

Спираль снискала большой успех и огромное распространение; она характерна для Эгейской, а затем и для микенской культур.



Часто и в самых разных странах применяется мотив круга, использовавшийся как собственно орнаментальный элемент, например на кипрских гончарных изделиях, так и для ограничения поверхности, заключающей в себе другие мотивы, как, например, на японских гербах.

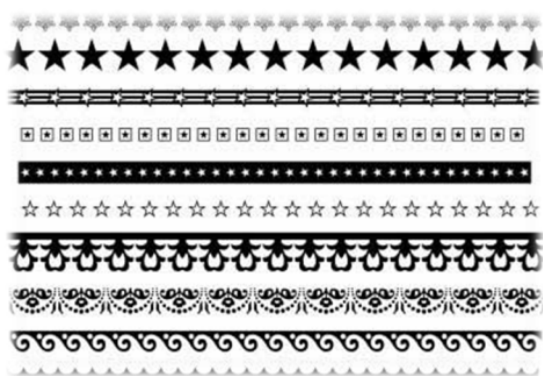


Весьма своеобразными деталями некоторых орнаментов, например в Китае, являются элементы, называемые веревочными орнаментами. Они действительно напоминают фигуры, которые получаются при переплетении веревок. Некоторые из них представляют собой извилистое кольцо, обычно разделенное осью симметрии на две почти одинаковые части - левую и правую.



Линейные орнаменты называются бордюрами.

БОРДЮР – это периодически повторяющийся рисунок на длинной ленте. Бордюры используются в настенных росписях, в чугунном литье для оград, мостов, набережных. Рисунки в виде бордюров наносятся на ткани, мебель, обои и т.д.

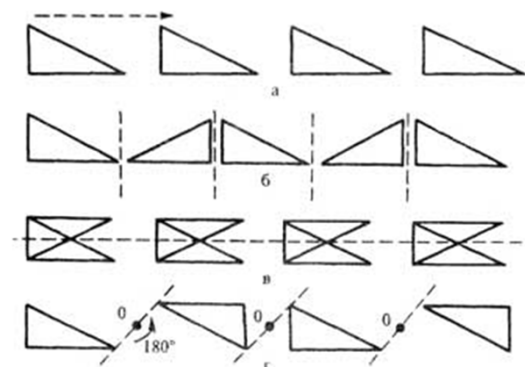


Любой бордюор может быть совмещён сам с собой параллельным переносом. При рисовании бордюоров кроме параллельного переноса используется симметрия относительно прямой, и центральная симметрия.

Математические принципы построения бордюоров:

Для создания бордюоров - линейных орнаментов - используются следующие преобразования:

- а) параллельный перенос;
- б) зеркальная (осевая) симметрия с вертикальной осью;
- в) зеркальная (осевая) симметрия с горизонтальной осью;
- г) поворотная (центральная) симметрия.



Всего существует семь типов симметрии бордюоров:

а) В простейшем случае симметрия бордюора полностью исчерпывается переносной симметрией вдоль оси.

б) Бордюоры обладают наряду с переносной также зеркальной симметрией. Здесь ось переноса является также осью симметрии.

в) У бордюоров ось переноса является осью скользящего отражения.

г) Бордюоры имеют вертикальные оси симметрии. Эти оси изображены на рисунке в виде отрезков прямых, перпендикулярных к оси переноса.

д) Бордюоры обладают переносной симметрией и поворотной симметрией (центральной).

е) Бордюоры обладают переносной симметрией, центральной симметрией и осевой симметрией относительно вертикальной оси.

ж) Бордюоры, основанные на комбинировании зеркальных отражений. Такие бордюоры имеют наряду с вертикальной также горизонтальные оси симметрии.

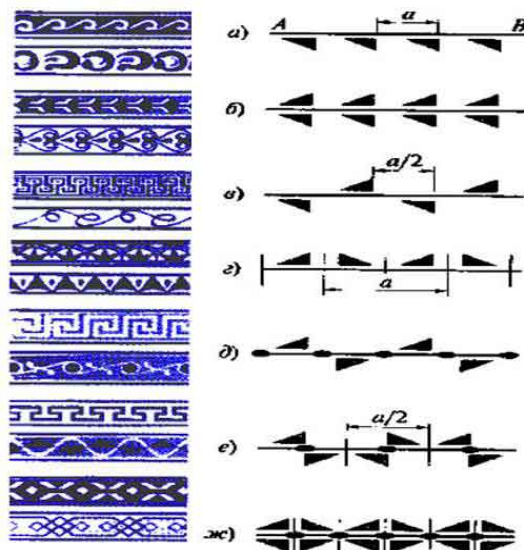
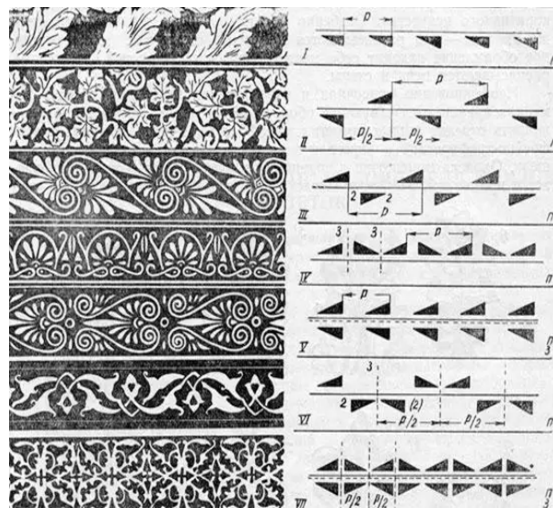


Рисунок бордюора получается, когда мы начинаем геометрически перемещать его элемент. Любой бордюор может быть совмещён сам с собой параллельным переносом. При рисовании бордюоров используются, кроме параллельного переноса, симметрия относительно прямой и центральная симметрия (симметрия относительно точки).

Для построения линейных орнаментов (бордюоров) нужно начать с построения его ячейки: также придумывают узор (трафаретку), потом с помощью параллельного переноса переносят узор на длину вектора (направленного отрезка) влево или вправо во столько раз, сколько нужно.

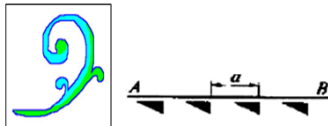


Глава 1.3. Построение орнаментов на компьютере

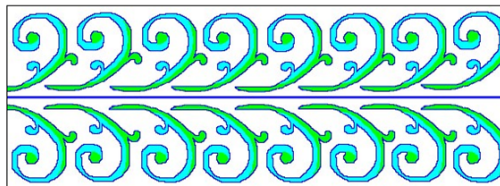
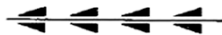
Основной принцип построения орнаментов в компьютерных программах – это отражение одного изображения в разные стороны.

«Рисунок» → «Отразить/повернуть» → «Отразить слева направо», «Отразить сверху вниз», «Повернуть на угол...»

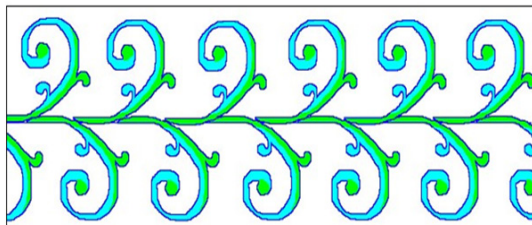
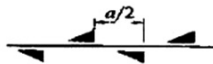
Орнамент первого типа. Для его построения рисуем фрагмент, затем используем параллельный перенос.



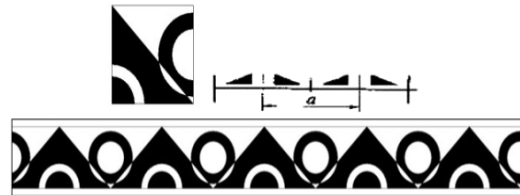
Орнамент второго типа. Используем параллельный перенос и осевую симметрию (относительно горизонтальной оси).



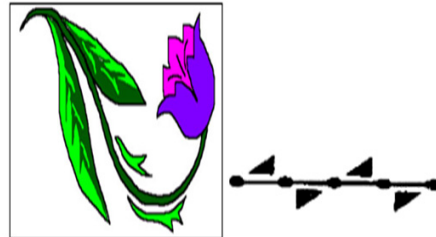
Орнамент третьего типа. Используется композиция преобразований: осевая симметрия фрагмента относительно горизонтальной оси, параллельный перенос «нижней» части орнамента на вектор $\bar{a}/2$, параллельный перенос получившегося рисунка на вектор \bar{a} .



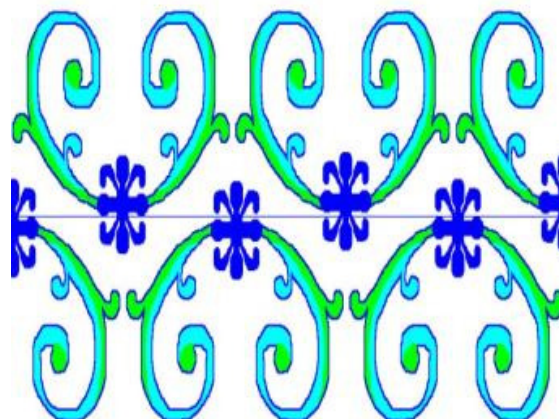
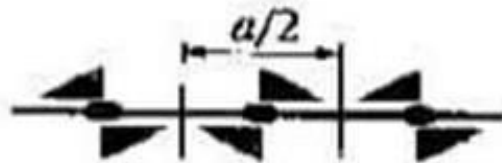
Орнамент четвертого типа. Фрагмент отображается относительно вертикальной оси, затем осуществляется параллельный перенос получившегося рисунка.



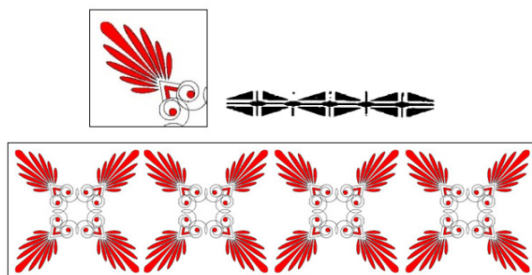
Орнамент пятого типа. Композиция центральной симметрии и параллельного переноса.



Орнамент шестого типа. Композиция центральной симметрии, симметрии относительно вертикальной оси и параллельного переноса.



Орнамент седьмого типа. Композиция осевых симметрий относительно горизонтальной и вертикальной осей и параллельного переноса.



Глава 1.4. Виды орнаментов. Как создаются орнаменты

По-характеру композиции и расположению на украшаемой поверхности орнамент может быть нескольких видов: **ленточным** (его еще называют бордюром), **сетчатым** и **розеточным**.

Рассмотрим ленточные орнаменты — бордюры. Бордюром называют плоскую ге-

ометрическую фигуру, характеризующуюся векторами ai и na (где n — целое число), при которых эта фигура переходит в себя, но не переходит в себя при параллельных переносах иного вида. Векторы называют направляющим для бордюра.

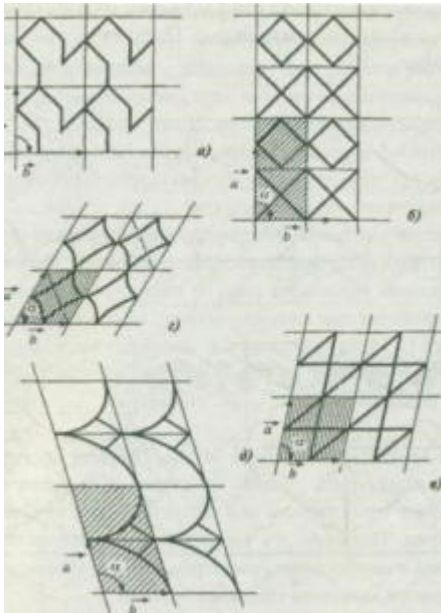
Простейший бордюр построить очень просто: достаточно нарисовать какую-нибудь геометрическую фигуру и выполнить параллельный перенос на заданный вектор влево и вправо вдоль полосы. Такая «первоначальная фигура» называется *фундаментальной областью* бордюра.

Бордюры встречаются в разных местах: в настенных росписях, на лестничных переходах. Их можно увидеть в чугунном литье, которое используется в оградах парков, решетках мостов и набережных.

Доказано, что существует *семь классов симметрии бордюров*.

№	Свойства бордюров	Пример
1.	Бордюры, которые не имеют иных симметрий, кроме параллельных переносов	
2.	Бордюры, у которых фундаментальная область обладает центром симметрии O	
3.	Бордюры, у которых фундаментальная область имеет ось симметрии, параллельную вектору a	
4.	Бордюры, у которых фундаментальная область имеет ось симметрии, перпендикулярную вектору a	
5.	Бордюры, у которых фундаментальная область имеет одну ось симметрии, перпендикулярную вектору a, а другую — параллельную вектору a	
6.	Бордюры, имеющие такие оси симметрии, которых нет у фундаментальных областей	
7.		

Помимо бордюров художникам-орнаменталистам известен и другой вид орнамента — *сетчатый*. Он заполняет всю плоскую поверхность сплошным узором. Для построения такого орнамента выделяют плоскую решетку, в которой одинаковые части повторяются в определенной геометрической последовательности. Различают *пять типов плоских решеток*, каждая из которых определяется двумя векторами a и b и углом π между ними. На рисунке показаны разные виды решеток: а) квадратная ($a = b, \alpha = 90^\circ$), б) прямоугольная ($a \neq b, \alpha = 90^\circ$), в) гексальная ($a = b, \alpha = 60^\circ$), д) ромбическая ($a = b, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 60^\circ$), з) *косая* ($a \neq b, \alpha \neq 90^\circ$).



Вид орнамента определяется не только структурой его решетки, но и числом элементов его симметрии. Зная геометрические закономерности, можно и самим сконструировать интересный орнамент или определить те геометрические преобразования, которые положены в его основу. Приложение 2.

Чем больше элементов симметрии содержит элементарная ячейка, тем интереснее и красивее орнамент. Каждая прямая, проходящая через сторону квадрата, а также прямая в ячейке может стать осью симметрии орнамента. Кроме того, имеется девять точек (A, B, C, D, M, O, N, L, K), вокруг которых можно повернуть ячейку, чтобы образовать новую ячейку или совместить старую ячейку саму с собой.

Помимо описанных видов орнамента в произведениях искусства встречается еще один. Такой орнамент замкнут и ограничен определенной геометрической формой (квадратом, ромбом, треугольником, кругом и др.). Орнамент, вписанный в круг или в правильный многоугольник, называется розеткой.



Глава 2. Геометрические паркеты

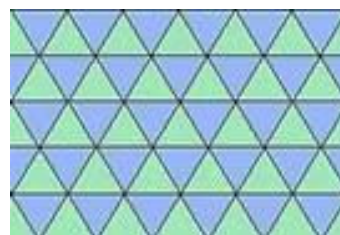
Паркет (или мозаика) - бесконечное семейство многоугольников, покрывающее плоскость без просветов и двойных покрытий. Иногда паркетом называют покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек; но мы будем рассматривать как правильные, так и неправильные многоугольники.

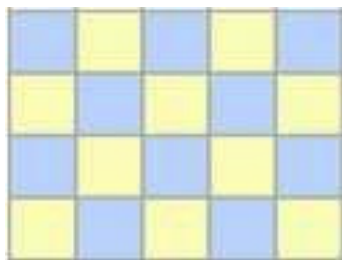
Паркеты из одинаковых правильных многоугольников

Сумма всех углов n -угольника равна $180^\circ(n-2)$. Все углы правильного многоугольника равны; следовательно, каждый из них равен $180^\circ(n-2)/n$. В каждой вершине паркета сходится целое число углов; поэтому число $2 \cdot 180^\circ$ должно быть целым кратным числа $180^\circ(n-2)/n$. Преобразуем отношение этих чисел:

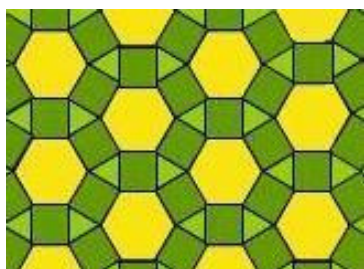
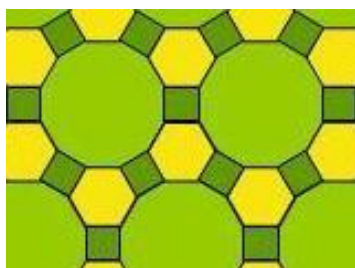
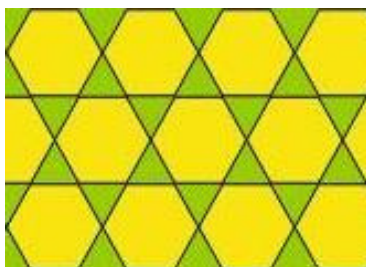
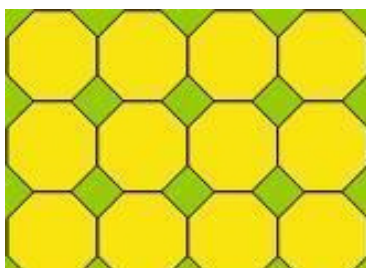
$$\frac{2\pi n}{\pi(n-2)} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Разность $n-2$ может принимать лишь значения 1, 2 или 4; поэтому n может быть равно только 3, 4 или 6. Значит, можно получить паркеты, составленные из правильных треугольников, квадратов или правильных шестиугольников.





Паркеты из разных правильных многоугольников



Паркеты из неправильных многоугольников

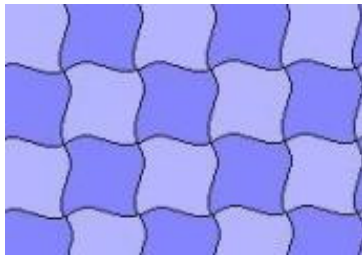
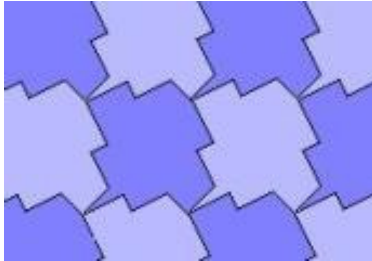
Параллелограмм	
Четырехугольник	
Произвольный треугольник	
Центрально-симметричный шестиугольник	

Паркеты из произвольных фигур

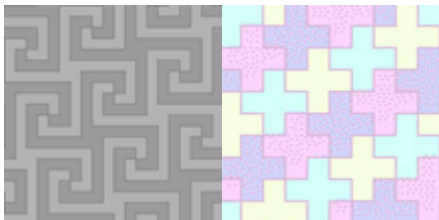
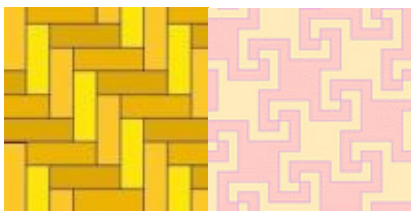
Некоторые определения паркета не ограничиваются многоугольниками; в этом случае паркетом называется покрытие плоскости без пропусков и перекрытий заданными фигурами (в частном случае - многоугольниками, правильными или неправильными, выпуклыми или невыпуклыми). В таком случае даже для паркетов из многоугольников может не соблюдаться требование «два многоугольника должны иметь общую вершину, общую сторону или совсем не иметь общих точек»; кроме того, появляется множество разнообразных паркетов, состоящих не из многоугольников, а из криволинейных фигур. Рассмотрим способы построения но-

вого паркета, исходя из этого «расширенного» определения. Итак, как нарисовать паркет? (некоторые из возможных способов)

Способ первый. Паркеты, полученные заменой отрезков «квадратной» сетки некоторыми кривыми или ломаными.



Способ второй. Объединяем отдельные элементы уже существующих паркетов. Примеры: паркет, полученные в результате объединения элементов квадратной сетки:

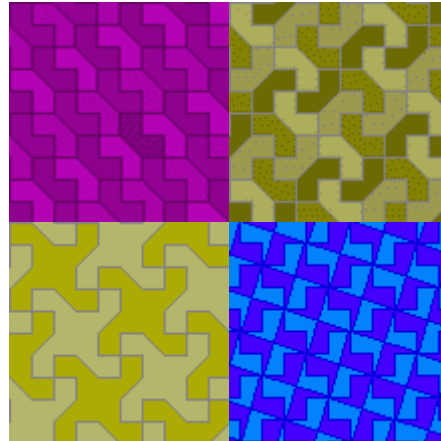


Паркет, каждый элемент которого получен в результате объединения пяти правильных треугольников:



Способ третий. Берем существующую сетку и дополняем ее новыми линиями. Получаем разбиение плоскости на фигуры, которые затем можно по-новому объединить. В частном случае - накладываем друг на друга две (или более) сетки уже известных паркетов, смещая или поворачивая одну сетку относительно другой; фигуры, образовавшиеся при пересечении линий, считаем элементами паркета.

Пример разбиения сетки из греческих крестов:

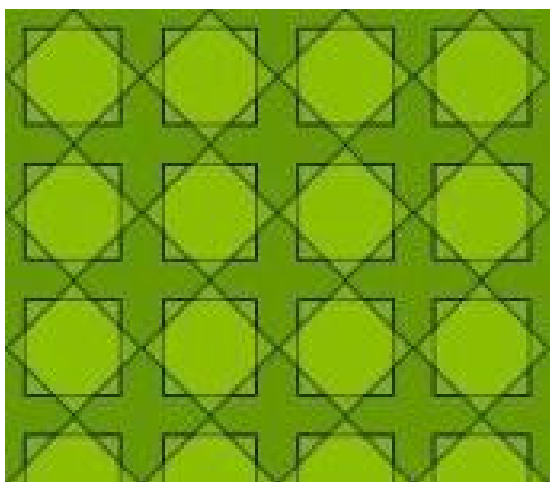
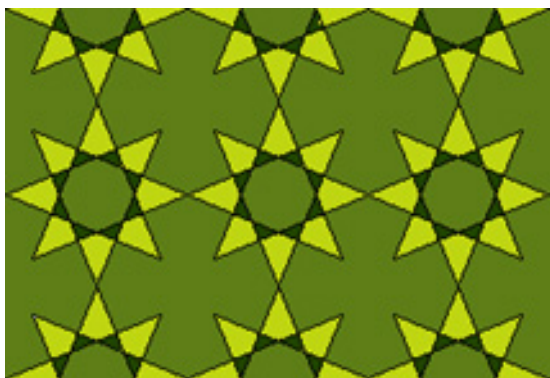


Способ четвертый. Выбираем некоторую кривую или ломаную и начинаем ее переносить на некоторый вектор, поворачивать, отражать получившиеся кривые или ломаные размещаем на плоскости таким образом, чтобы они образовали замкнутые контуры (которые в дальнейшем будут рассматриваться как элементы паркета). Если рассматривать только незамкнутые кривые и ломаные, паркет будет напоминать полученные способом №1.

Для получения следующего паркета была взята дуга спирали, три раза повернута на 90° , а затем к получившейся фигуре был применен параллельный перенос.



А вот паркеты, полученные с помощью параллельного переноса звездчатых многоугольников:



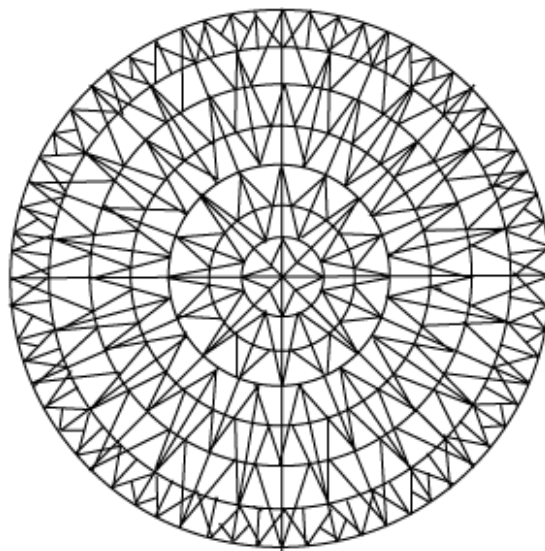
Совмещая вершины звездчатых многоугольников, получаем паркеты, состоящие из правильных восьмиугольников, равнобедренных прямоугольных треугольников, а также из невыпуклых 16-угольников, напоминающих крест.

Глава 3.1 Геометрия мозаичной розетки. Компас и колесо

Четырехлучевую симметричную звезду часто называют компасом, поскольку этот знак напоминает и стрелку компаса, и маркировку карт, указывающую ориентацию относительно сторон света. Однако знаку этому намного больше лет, чем собственно компасу. Четырехлучевые звезды были, вероятно, первыми геометрически построенными декоративными изображениями звезд, потому что построение такой звезды интуитивно доступно даже детям. Квадрат, крест, четырехугольник легко преобразовываются в звезду, и четырехлучевые, четырехлепестковые изображения встречаются даже в доисторической пещерной графике. Дальнейшим естественным усложнением четырехлучевого знака является его удвоение и получение восьмилучевой звезды.

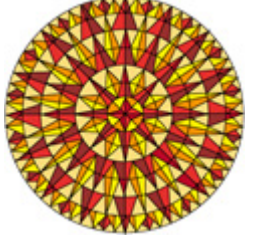
Лучи в круге или круг с лучами с центральной симметрией рисунка обычно восходят к сакральным изображениям солнца, особенно важным и значимым в древних религиях поклонения солнечным богам. Декоративные звезды как в орнаментах интерьера, так и в декоративной отделке предметов обихода, в одежде, в утвари и вооружении часто воспринимались (и воспринимаются) как защитный символ, оберег. И даже стремление современных дизайнеров и декораторов так или иначе использовать элементы типа розеток с симметрией из четного числа секторов в основе своей опирается на исторически заложенное позитивное восприятие таких образов.

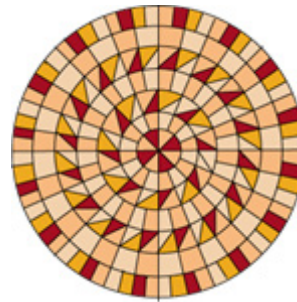
Математика построения розетки-компаса предельно проста, концентрические круги и диаметральные лучи делят плоскость розетки на четыре, восемь, шестнадцать и тридцать две части. Лучи образуются за счет построения треугольников в кольцах рисунка. Количество колец и лучей, а также вытянутость лучей могут быть произвольными, однако следует помнить, что перегруженность рисунка мелкими деталями часто плохо воспринимается визуально, и в пропорциях построения лучей желательно следовать принципу золотого сечения, так как именно такое соотношение наиболее близко к природным, естественным пропорциям любых объектов.



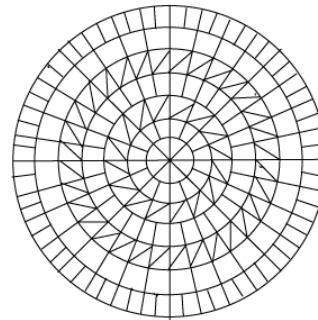
Геометрия мозаичной розетки

В зависимости от цветового решения розетки могут восприниматься по-разному. Если сделать акцент на лучевой структуре, то получится звезда, если подчеркнуть концентрические кольца рисунка, можно получить колесо.

<p>Вариант цветового решения для мозаики из камня с преобладанием звездного мотива.</p>	
<p>Вариант цветового решения для паркетной розетки с акцентом на звездный рисунок.</p>	
<p>Вариант цветового решения с этнической гаммой и акцентом на мотив колеса и круга.</p>	



Цветовое решение для паркета Цветовое решение для дерева или камня



Глава 3.2. Геометрия мозаичной розетки. Зубчатое колесо

Одним из самых древних видов мозаик с точки зрения рисунка были мощения полов и дворики в виде концентрических кругов. Первые мастера мозаичного дела выкладывали розетки из разноцветной гальки, но с развитием технологий камнеобработки для мозаик стали использоваться правильные квадраты и треугольники. Развитие математики и геометрии эпохи расцвета эллинических государств способствовало распространению знаний о законах симметрии и применению этих знаний в изобразительном искусстве, которое воспринималось неотъемлемой частью жизни и развития общества.

Геометрическое построение элементарных розеток - это разбиение круга на концентрические кольца и диаметральные сектора. Рассмотрим простейший вариант создания такой розетки.

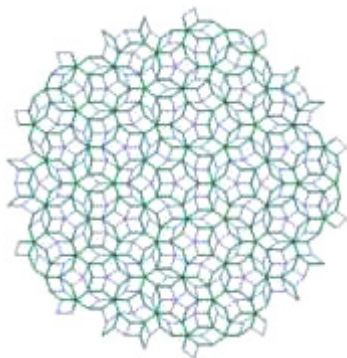


Начертив круг заданного радиуса, разобьем внутренний радиус на семь разных частей и проведем концентрические окружности. Внутренний круг разделим на восемь секторов, с углом 45 градусов. Следующие два круга делим ещё пополам, до 22,5 градусов, и последнее деление проводим для последнего кольца. Третье и пятое кольцо от центра разбиваем на треугольники диагональю, проведенной в получившейся фигуре, которую можно принять за прямоугольник.

В результате получаем простой рисунок, все элементы которого могут быть представлены как примерно равные треугольники, прямоугольники, квадраты. Примерность эта важна для создания мозаик из простых каменных или деревянных деталей, не требующих сложных фигурных резков. Но в то же время рисунок даёт достаточно возможностей для фантазий и создания эффектных образов. В зависимости от цветовых вариаций рисунок розетки может напоминать зубчатое колесо или акцентировать внимание на лучах, исходящих из центра.

Глава 3.3 Мозаика пенроуза и древние исламские узоры

В 1973 году английский математик Роджер Пенроуз (Roger Penrose) создал особенную мозаику из геометрических фигур, которая так и стала называться – мозаикой Пенроуза. Мозаика Пенроуза представляет собой узор, собранный из многоугольных плиток двух определённых форм (немного различающихся ромбов). Ими можно замостить бесконечную плоскость без пробелов.



Мозаика Пенроуза в версии её создателя.

Она собрана из ромбов двух типов, один – с углом 72 градуса, другой – с углом 36 градусов. Картина получается симметричная, но не периодичная. Получающееся изображение выглядит так, будто является неким «ритмическим» орнаментом – картинкой, обладающей трансляционной симметрией. Такой тип симметрии означает, что в узоре можно выбрать определённый кусочек, который можно «копировать» на плоскости, а затем совмещать эти «дубликаты» друг с другом параллельным переносом (проще говоря, без поворота и без увеличения).

Однако, если присмотреться, можно узреть, что в узоре Пенроуза нет таких повторяющихся структур – он аperiodичен. Но дело отнюдь не в оптическом обмане, а в том, что мозаика не хаотична: она обладает вращательной симметрией пятого порядка.

Это значит, что изображение можно поворачивать на минимальный угол, равный $360 / n$ градусам, где n – порядок симметрии, в данном случае $n = 5$. Следовательно, угол поворота, который ничего не меняет, должен быть кратен $360 / 5 = 72$ градусам.

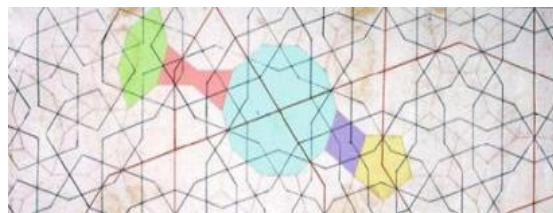
Примерно десятилетие выдумка Пенроуза считалась не более чем милой математической абстракцией. Однако в 1984 году Дэн Шехтман (Dan Shechtman), профессор израильского технологического института (Technion), занимаясь изучением строения алюминиево-магниевого сплава, обнаружил, что на атомной решётке этого вещества происходит дифракция.

Предыдущие представления, существовавшие в физике твёрдого тела, исключали такую возможность: структура дифракционной картины обладает симметрией пятого порядка. Её части нельзя совмещать параллельным переносом, а значит, это вовсе никакой не кристалл. Но дифракция характерна как раз для кристаллической решётки! Учёные договорились о том, что данный вариант будет называться квазикристаллами – чем-то вроде особого состояния вещества. Ну а вся красота открытия в том, что для

него уже давно была готова математическая модель – мозаика Пенроуза.

А совсем недавно стало понятно, что этой математической конструкции намного больше лет, чем можно было себе представить. В 2007 году Питер Лу (Peter J. Lu), физик из Гарварда (Harvard University) за компанию с другим физиком — Полом Стейнхардтом (Paul J. Steinhardt), но из Принстона (Princeton University), — опубликовал в Science статью, посвящённую мозаикам Пенроуза. Казалось бы, неожиданного тут немного: открытие квазикристаллов привлекло живой интерес к данной теме, что привело к появлению кучи публикаций в научной прессе.

Однако изюминка работы в том, что она посвящена далеко не современной науке. Да и вообще — не науке. Питер Лу обратил внимание на узоры, покрывающие мечети в Азии, построенные ещё в Средневековье. Эти легко узнаваемые рисунки сделаны из мозаичной плитки. Они называются гирихи (от арабского слова «узел») и представляют собой геометрический орнамент, характерный для исламского искусства и состоящий из многоугольных фигур.

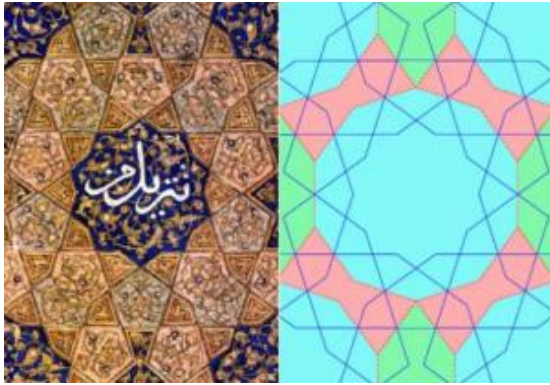


Образец выкладки плитки, показанный в арабском манускрипте XV века.

Цвета исследователи выделили повторяющиеся области. На основе этих пяти элементов выстроены все геометрические узоры средневековых арабских мастеров. Повторяющиеся элементы не обязательно совпадают с границами плиток.

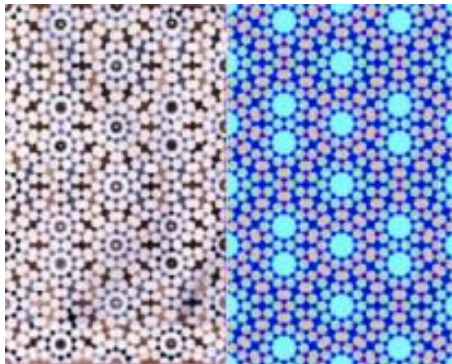
В исламском орнаменте выделяют два стиля: геометрический – гирихи, и растительный – ислими. Гирихи (перс.) – сложный геометрический орнамент, составленный из стилизованных в прямоугольные и полигональные фигуры линий. В большинстве случаев используется для внешнего оформления мечетей и книг в крупном издании.

Ислими (перс.) – вид орнамента, построенного на соединении выюнка и спирали. Воплощает в стилизованной или натуралистической форме идею непрерывно развивающегося цветущего листового побега и включает в себя бесконечное разнообразие вариантов. Наибольшее распространение он получил в одежде, книгах, внутренней отделке мечетей, посуде.



Обложка Корана 1306-1315 годов и прорисовка геометрических фрагментов, на которых основан узор. Этот и следующий примеры не соответствуют решёткам Пенроуза, но обладают вращательной симметрией пятого порядка

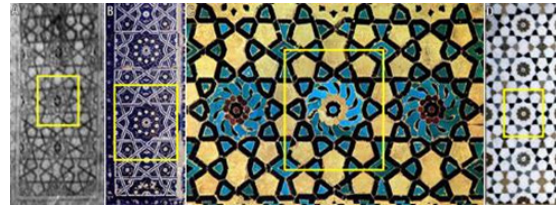
До открытия Питера Лу считалось, что древние архитекторы создавали узоры гириха с помощью линейки и циркуля (если вообще не по наитию). Однако пару лет назад, находясь во время путешествия в Узбекистане, Лу заинтересовался узорами мозаик, украшавшими местную средневековую архитектуру, и заметил в них что-то знакомое. Вернувшись в Гарвард, учёный стал рассматривать аналогичные мотивы в мозаиках на стенах средневековых построек Афганистана, Ирана, Ирака и Турции.



Этот образец датирован более поздним периодом – 1622 год (индийская мечеть).

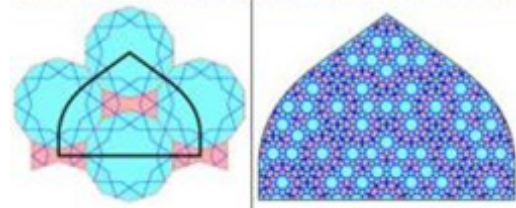
Глядя на него и прорисовку его структуры, нельзя не восхититься трудолюбию исследователей. И, конечно же, самих мастеров. Питер Лу обнаружил, что геометрические схемы гирихов практически одинаковы, и смог выделить основные элементы, использовавшихся во всех геометрических орнаментах. Кроме того, он нашёл чертежи этих изображений в старинных манускриптах, которыми древние художники пользовались в качестве своеобразной шпаргалки по украшению стен. Для создания этих узоров применяли не простые, случайно придуманные контуры, а фигуры,

которые были расположены в определённом порядке. Древние узоры оказались точными построениями мозаик Пенроуза.



На этих снимках выделены одинаковые области, хотя это и фотографии из самых разных мечетей

Образцом почти идеальной квазикристаллической структуры исследователи посчитали святилище имама Дарб-и в иранском городе Исфахане, датируемое 1453 годом.



Портал святилища имама Дарб-и в Исфахане (Иран).

Здесь друг на друга наложены сразу две системы гирихов.



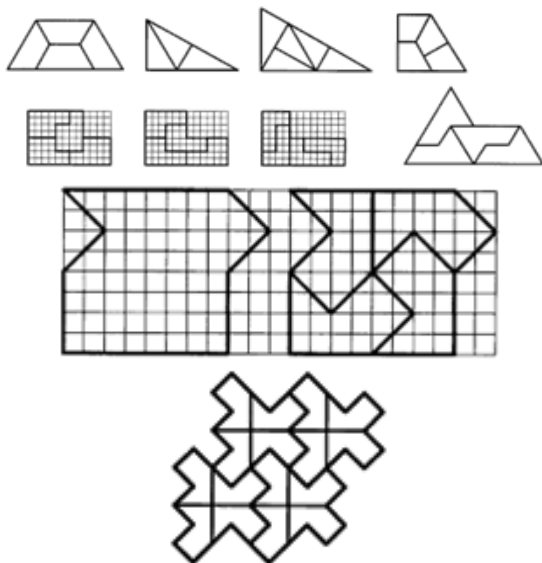
Колонна внутреннего двора мечети в Турции (около 1200 года) и стены медресе в Иране (1219 год). Это ранние произведения, и в них используется всего два структурных элемента, найденных Лу.



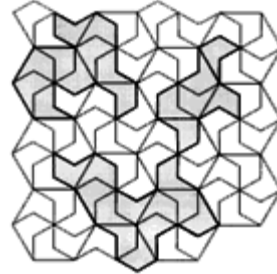
Глава 3.4 Построение мозаик в стиле Мориса Эшера

В геометрии под мозаикой (паркетом) понимают заполнение плоскости одинаковыми фигурами (элементами мозаики), которые не перекрывают друг друга и не оставляют на плоскости пустого пространства (иногда мозаикой называют заполнение плоскости несколькими фигурами, например, правильными многоугольниками). Обычный тетрадный лист в клеточку представляет собой простейшую геометрическую мозаику. Элементом здесь является квадрат. Элементами мозаики могут быть также равносторонний треугольник, правильный шестиугольник, произвольный параллелограмм, произвольный четырехугольник. Можно придумать сотни, тысячи разных элементов паркетов- Приложение 3.

Придуманы мозаики, у которых несколько элементов образуют фигуру, подобную элементу мозаики. Примеры таких паркетов:



Мозаика-паркет, элементами которой являются одинаковые пятиугольники с углами 90° , 120° , 60° , 240° и 30° , которые получились разбиением правильного шестиугольника. Из этих пятиугольников образованы фигуры.

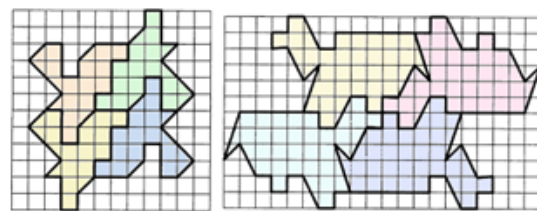


Всего существует 17 видов симметрии сетчатых орнаментов – Приложение 4.

Мозаики являются прекрасным материалом для интересного и содержательного изучения геометрии и некоторых закономерностей расположения фигур на плоскости. Визуальное представление и необходимость решения с виду простой задачи занимает как детей, так и взрослых. Составление своих рисунков мозаик может стать как профессиональной задачей дизайнера, так и уроком для школьников.

Одни из самых знаменитых рисунков мозаик придумал голландский художник Морис Эшер. Элементами паркета у него служили фигуры животных, птиц, рептилий, находящиеся в определенном порядке по отношению друг к другу.

На рисунках Приложения 5 представлено несколько фигур, получить мозаику из которых можно геометрической операцией параллельного переноса. На деле это означает, что фигурка смещается на некоторое расстояние и как бы вкладывается в предыдущую, не меняя своего положения. Если в качестве меры расстояния взять 1 клеточку, то рассчитав, на какое количество клеточек нужно сместить фигурку вверх и вправо, получим два числа, определяющих вектор перемещения. Для школьников интересно проследить связь между параллельными переносами и векторами и возможность разложения каждого вектора полученного векторного пространства по двум базисным векторам. Для взрослых - поиграться с неправильным копированием образца. Изменение вектора может привести к получению интересных мозаичных рисунков.



Общий принцип построения мозаик из сложных фигур (рисунков животных, растений, объектов с криволинейными формами) с использованием различных видов симметрии можно описать как постепенный переход от простых фигур « по тетрадным клеточкам» к более сложным. Начав с простых квадратов и четырехугольников, постепенно усложняя и развивая фигуры, получаем сначала примитивное схематичное изображение, затем добавлением деталей и скруглением форм получаем детализированное изображение со сглаженным контуром- Приложение 6.

Как пример - мозаики, разработанные в таком же стиле. Автор рисунков - А. Цукарь- Приложение 7.

Мозаики, подобные приведенным, универсальны по применению. Разработка мозаичных элементов может отталкиваться не от форм живых существ, а от различных объектов символики, техногенных и урбанистических форм, пиктограмм и прочего. Одним из факторов популярности мозаик Эшера является их способность заставлять зрителя погружаться в изучение подробностей рисунка - от мелких деталей к крупным, от восприятия в целом к сосредоточению на одном элементе. Разглядывание мозаик - отличный способ расслабления и отдыха, приведения мыслей в порядок, и даже медитации. Декорирование пространства мозаикой собственной разработки - это и дополнительные возможности формирования позитивного настроения путем использования конкретных образов, формирующих положительное впечатление. (Приложение 8.)

Вывод

Орнамент - это узор, состоящий из повторяющихся, ритмически упорядоченных элементов. В построении орнамента используют главным образом принцип симметрии. В основе узоров лежат основные геометрические преобразования т.к. симметрии, разные геометрические фигуры.

Роль математики в построение узоров на улице (стрит-арт) очень важна. Если не знать основные математические закономерности, то построить узор будет практически нереально.

Заключение

Проведённая работа помогла изучить и систематизировать процедуру построения орнаментов (бордюров), которую коротко можно описать в виде следующего алгоритма:

1. Рисуетя фрагмент орнамента. Это может быть законченный элемент в виде цветка, ветки, завитка, или его часть - поло-

вина, четверть. Например, половина бабочки или четверть ромба.

2. Полученный фрагмент отображают с помощью одного из следующих геометрических преобразований: осевая симметрия, центральная симметрия, параллельный перенос. Возможно использование композиции нескольких преобразований.

3. Полученный более сложный фрагмент с помощью параллельного переноса «распространяют» на необходимую длину.

Семь основных способов построения бордюров позволяют получить несколько различных композиций, основанных на использовании одного фрагмента, создавая тем самым неограниченные просторы для творчества.

Использование орнаментов в быту, различных ремёслах, живописи, архитектуре делает окружающие нас предметы ярче и выразительнее, расцветчивает их новыми красками, привлекает внимание, давая повод для осмысления и понимания красоты и гармонии. Кроме бордюров существуют и другие виды орнаментов, но это - тема для новых исследовательских работ.

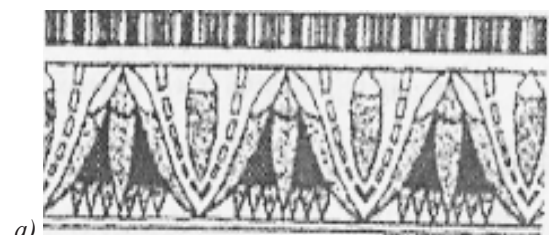
А эта работа увлекла нас настолько, что захотелось создавать новые и новые орнаменты. И вот что у нас получилось.

Созданные нами орнаменты:

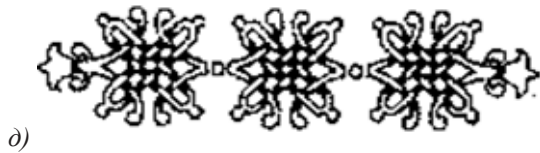
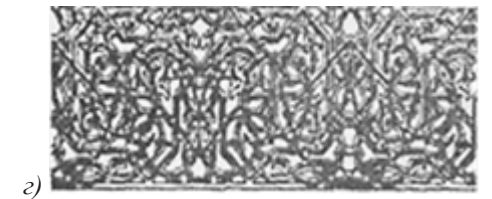


Продолжение в приложении 9.

Приложение 1



a)



Орнамент в украшении ванной



Кувшин с мозаикой



Орнамент в украшении оружия



Мозаика на тарелке



Мозаика на шкафу



Мозаика на сундуке в стиле барокко



Стол в технике мозаика



Диван и столик. Орнамент



Тарелки в технике мозаика



Комод в стиле рококо



Мозаика потолка мечети



Орнамент в одежде

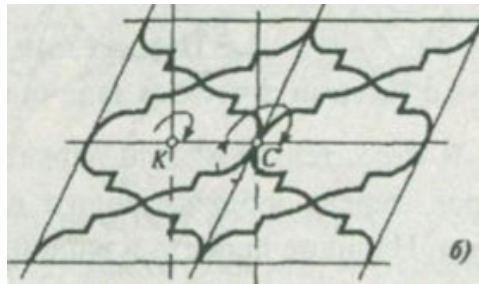
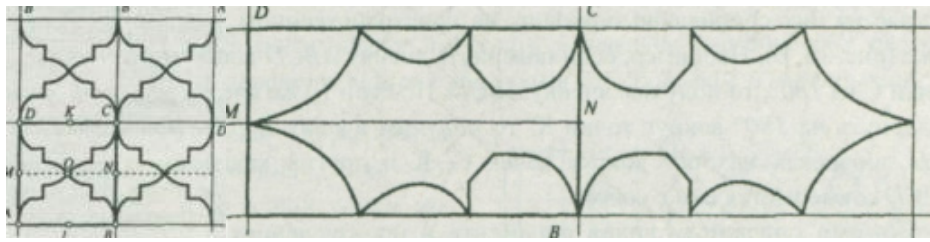


Мозаика стен мечети

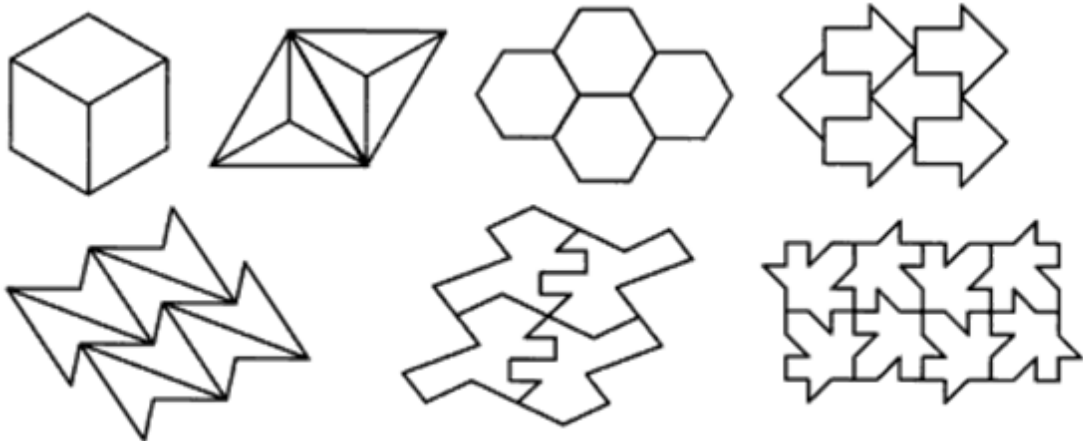


Орнамент на рубашке

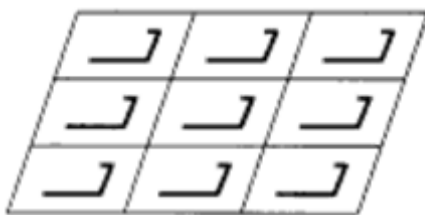
Приложение 2



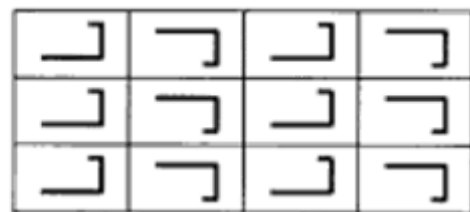
Приложение 3



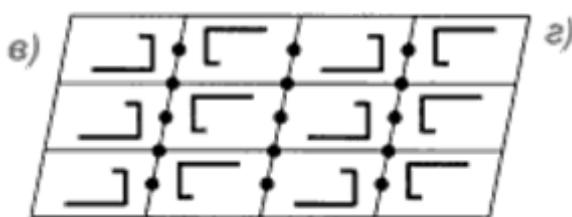
Приложение 4



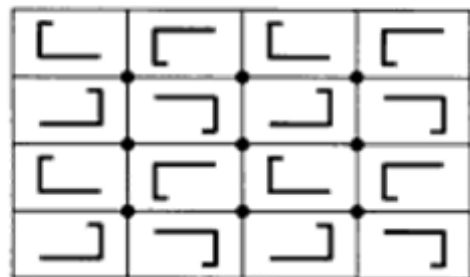
а)



б)



в)



а)

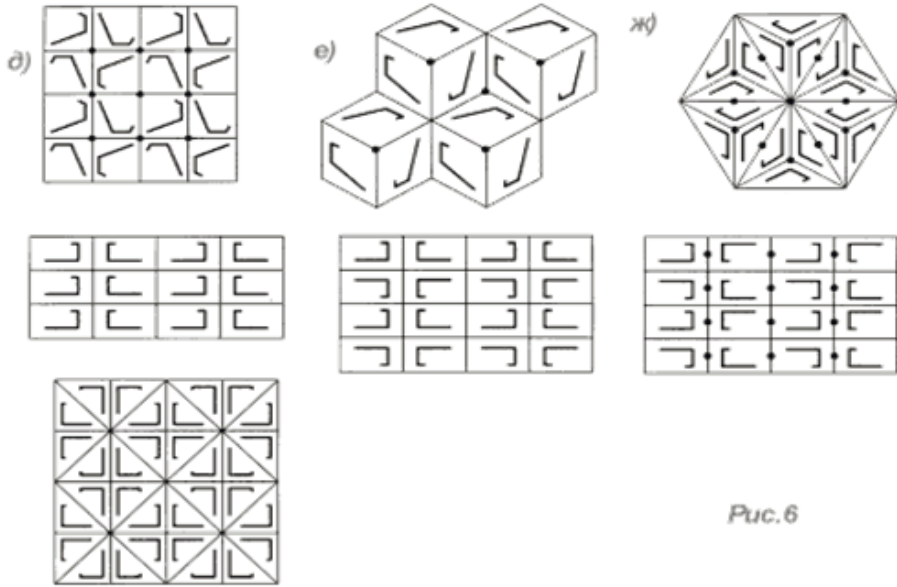
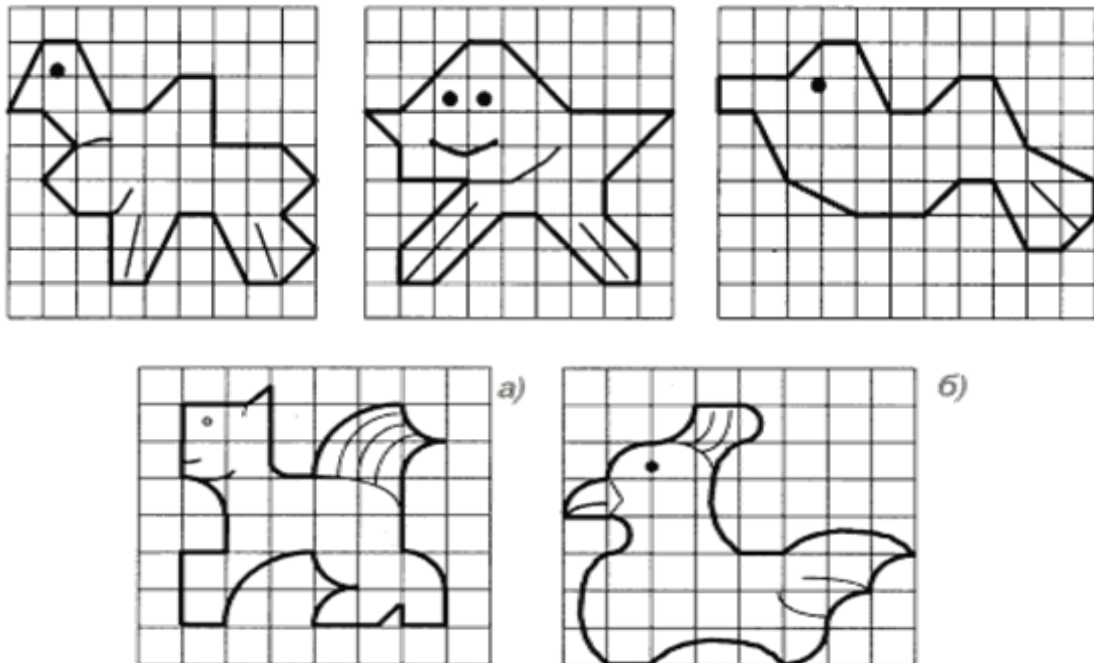
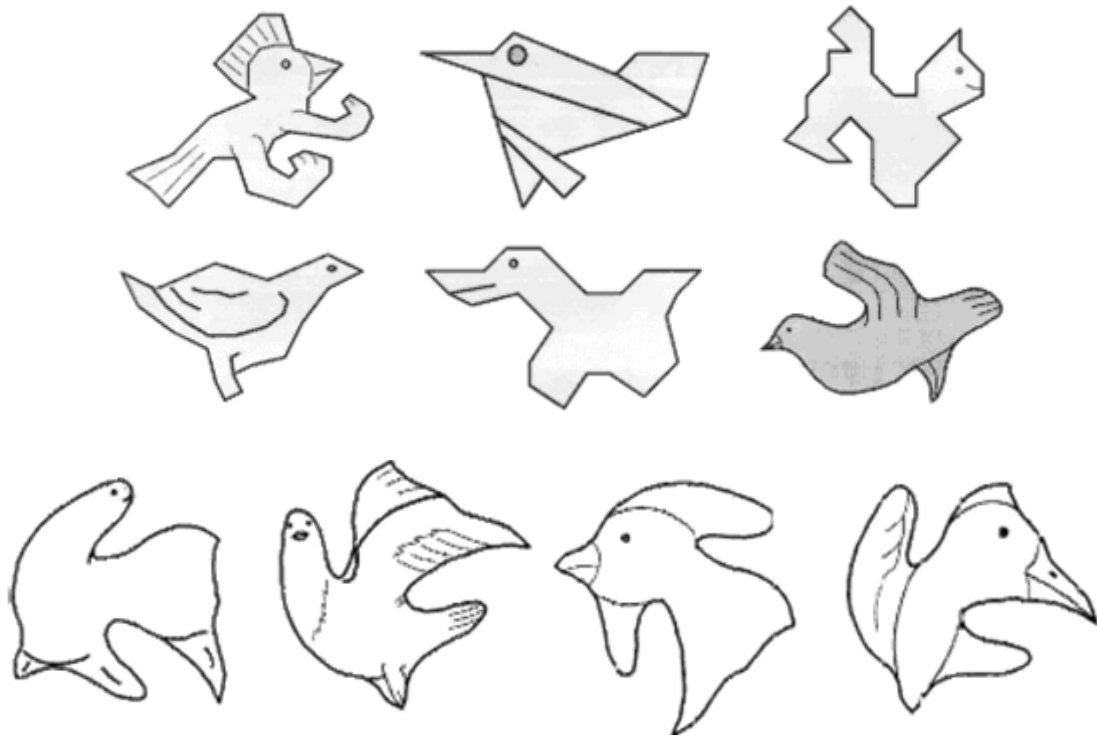


Рис. 6

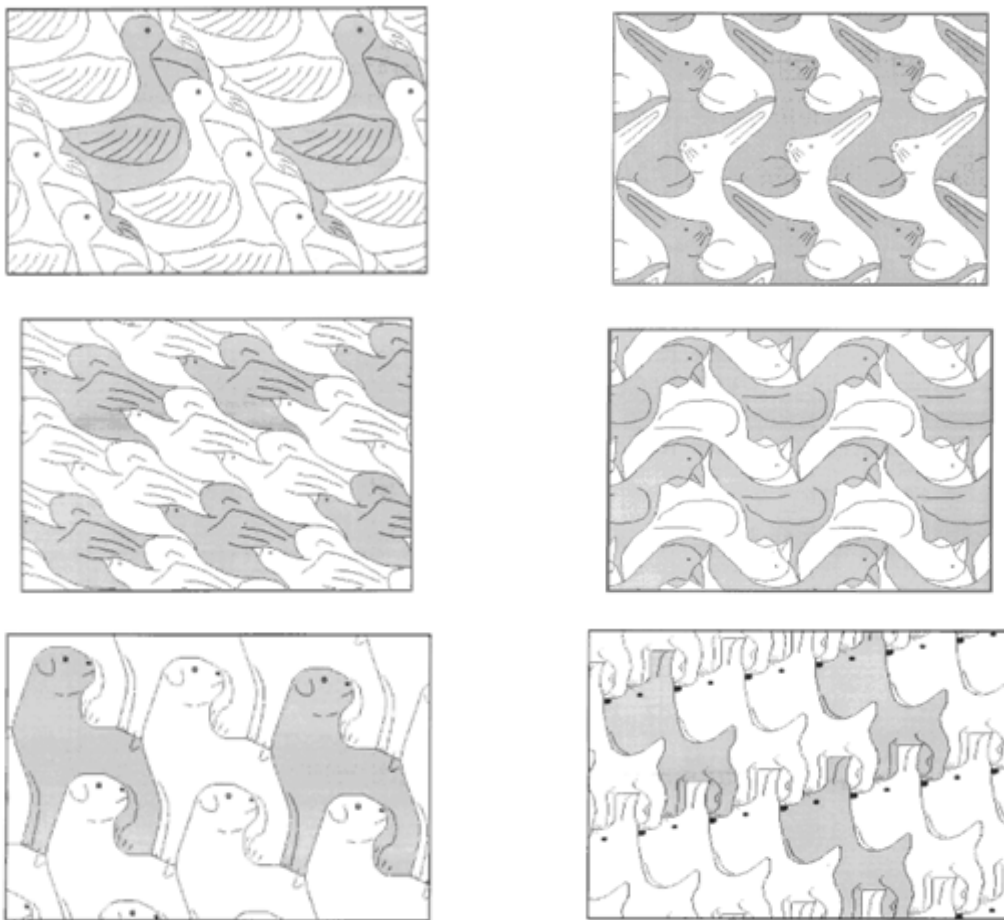
Приложение 5



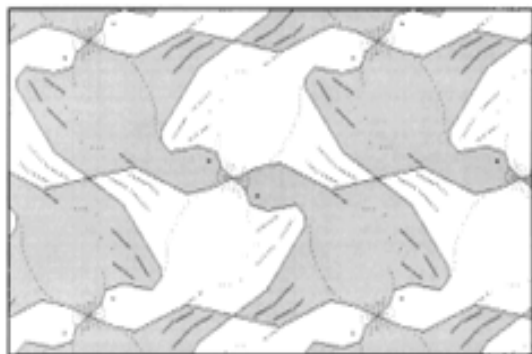
Приложение 6



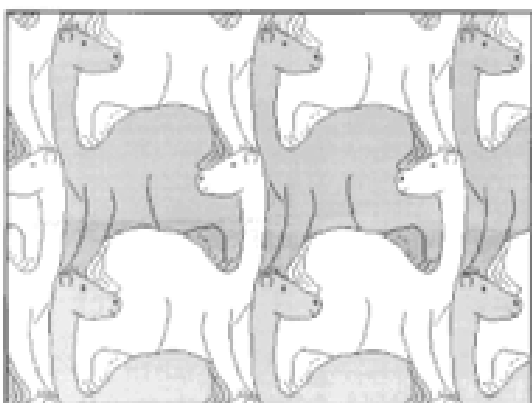
Приложение 7



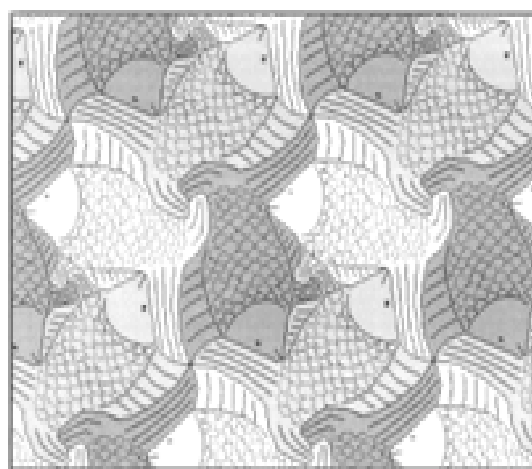
Приложение 8



Проект мозаики Мориса Эшера в смальте

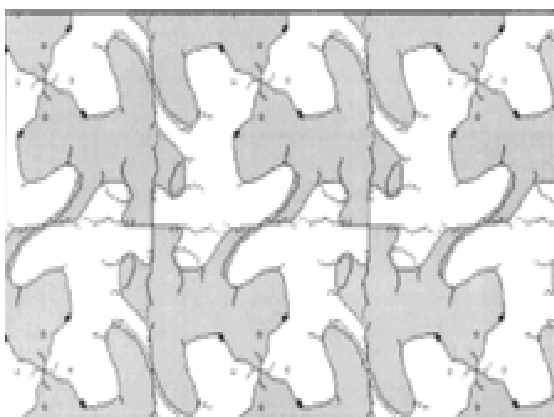


Настенное панно из мозаики по картине М. Эшера «Птицы»



Приложение 9

Также мы создали орнаменты в других изделиях





Деревянные дощечки с орнаментальной росписью



Самовар, вырезанный из дерева, с орнаментом

Список литературы

1. А.Н.Колмогоров. Паркеты из правильных многоугольников. Журнал «Квант» №3, 1970 г.
2. П.И.Совертков и др. Геометрический паркет на экране компьютера журнал «Информатика и образование, №9 за 2002 г.
3. http://otherreferats.allbest.ru/culture/00165702_0.html