

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Голдобин Н.О.

г. Энгельс, МОУ «Средняя общеобразовательная школа №15

с углубленным изучением отдельных предметов
имени Героя Советского Союза Расковой М.М.», 5 «М» класс

Руководитель: Шатова О.Р., г. Энгельс, МОУ «Средняя общеобразовательная школа №15
с углубленным изучением отдельных предметов имени Героя Советского Союза Расковой М.М.»,
учитель математики

Возникновение чисел в нашей жизни не случайность. Невозможно представить себе общение без использования чисел. История чисел увлекательна и загадочна. Человечеству удалось установить целый ряд законов и закономерностей мира чисел, разгадать кое-какие тайны и использовать свои открытия в повседневной жизни. Без замечательной науки о числах – математики – немыслимо сегодня ни прошлое, ни будущее. А сколько ещё неразгаданного.

Актуальность исследовательского проекта по выбранной теме: современная наука и техника раскрыли величие человеческого разума. Они изменили мир и представления о нем. Но до сих пор люди ищут и не могут пока найти ответы на многие вопросы. Совершенные числа не изучены в полной мере. Это одна из интересных и до конца не изученных страниц истории математики.

Идея (проблема). Данная тема мною была выбрана не случайно. Мне интересно узнавать что-новое, необычное. Я с большим удовольствием участвую в различных олимпиадах. Но когда, изучая энциклопедию по математике, увидел тему «наибольший общий делитель», мне показалось, что это очень неинтересно - считать все время по одному и тому же алгоритму. Своими сомнениями поделился с учителем. И она ответила, что делители – это одно из самых загадочных понятий в математике. Просто необходимо узнать по этой теме побольше. Я решил последовать ее совету и очень скоро убедился, что это действительно так. Как интересен мир совершенных чисел. Так родилась моя исследовательская работа.

Цели моего проекта заключается в следующем:

- познакомиться с понятием совершенного числа;
- исследовать свойства совершенных чисел;
- привлечь внимание учащихся к данной теме.

Задачи проекта:

- изучить и проанализировать литературу по теме исследования;

- «открыть» свойства совершенных чисел и область их применения;

- расширить свой умственный кругозор.

Гипотеза: выяснить роль совершенных чисел в математике.

Вид проекта: исследовательский, моно предметный, индивидуальный.

Объект изучения: совершенные числа и их свойства.

Сроки проведения исследования: две недели.

Методика исследования:

- сбор и изучение литературы и материалов;
- опрос-обращение к определенной группе людей, путем письменного анкетирования и устного интервьюирования;
- продукт исследования – мультимедийная презентация по теме.

Что такое совершенные числа

Число является одним из основных понятий математики. Понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин; эта связь сохраняется и теперь.

Существует большое количество определений понятию "число". О числах первый начал рассуждать Пифагор. Пифагору принадлежит высказывание "Всё прекрасно благодаря числу". По его учению число 2 означало гармонию, 5 - цвет, 6 - холод, 7 - разум, здоровье, 8 - любовь и дружбу. А число 10 называли "священной четверицей", так как $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Оно считалось священным числом и олицетворяло всю Вселенную.

Первое научное определение числа дал Эвклид в своих "Началах": "Единица есть то, в соответствии, с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть, сложенное из единиц".

Античные математики считали очень важным рассматривать вместе с каждым числом все его делители, отличные от самого этого числа. Все делители, на которые данное число делится нацело, можно получить из разложения числа на простые множители. Такие делители называют соб-

ственными. Числа, имеющие много собственных делителей, назывались *abundant* (избыточными), а имеющие мало, – *defizient* (недостаточными). При этом в качестве меры использовалось не количество, а сумма собственных делителей, которую сравнивали с самим числом. Так, например, для 10 сумма делителей $1 + 2 + 5 = 8 < 10$, так что делителей «недостаток». Для 12 же $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$, т.е. делителей «избыток». Поэтому 10 – «недостаточное», а 12 – «избыточное» число.

Встречается и «пограничный» случай, когда сумма собственных делителей равна самому числу. Например, для 6

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

То же для 28:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Такие числа древние греки особенно ценили и называли их совершенными. Точно неизвестно, когда и где впервые обратили внимание на совершенные числа. Предполагают, что они были известны уже в древнем Вавилоне и древнем Египте. Во всяком случае, вплоть до V века н.э. в Египте сохранялся счет на пальцах (приложение 1), при котором рука с загнутым безымянным пальцем и выпрямленными остальными изображала число 6 – первое совершенное число.

Поиск совершенных чисел

Я не знал, как искать совершенные числа, поэтому решил попробовать найти их как искали в древности. Взял числа от 1 до 30 и на калькуляторе стал проверять каждое число. Посмотрите, что у меня получилось (приложение 2). Среди всех чисел мне удалось найти только два числа 6 и 28. Очень трудоемкий поиск как оказалось.

История открытия совершенных чисел

1. Четные совершенные числа.

Никомах Герасский (I–II век н.э.), знаменитый греческий философ и математик (приложение 2), писал:

Совершенные числа красивы. Красивые вещи редки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными бывают все числа, в то время как совершенных чисел немного.

Сколько же их? Никомах этого не знал. Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число 6. Особыми мистическими свойствами обладало число 6 в учении пифагорейцев, к которым принадлежал и Никомах. Много внимания уделяет этому числу великий Платон (V–IV век до н.э.) в своих «Диалогах» (приложение 3). Недаром и в библейских преданиях утверждается,

что мир создан был в шесть дней, ведь более совершенного числа среди совершенных чисел, чем 6, нет, поскольку оно первое среди них.

Следующим совершенным числом, известным древним, было число 28. В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала были расположены 28 келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было двадцать восемь членов. До последнего времени столько же членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах (приложение 5).

Древних математиков удивляло особое свойство этих двух чисел. Каждое из них, как уже было отмечено, равно сумме всех своих собственных делителей:

$$6 = 1 + 2 + 3 \quad \text{и} \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

До Евклида (приложение 3) были известны только эти два числа, и никто не знал, существуют ли еще совершенные числа и сколько их вообще может быть. Великий основатель геометрии много занимался изучением свойств чисел; конечно, его не могли не интересовать совершенные числа. Евклид доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей

$$2p-1 \quad \text{и} \quad 2p-1,$$

где $2p-1$ – простое число, является совершенным числом, – эта теорема теперь носит его имя. Если в формулу Евклида

$$2p-1 \cdot (2p-1)$$

подставить $p = 2$, то получим

$2 \cdot 2-1 \cdot (2 \cdot 2-1) = 21 \cdot (22-1) = 2 \cdot 3 = 6$ – первое совершенное число, а если $p = 3$, то $2 \cdot 3-1 \cdot (2 \cdot 3-1) = 22 \cdot (23-1) = 4 \cdot 7 = 28$ – второе.

Благодаря своей формуле Евклид сумел найти еще два совершенных числа: третье при $p = 5$ и четвертое при $p = 7$. Вот эти числа:

$$2 \cdot 5-1 \cdot (2 \cdot 5-1) = 24 \cdot (25-1) = 16 \cdot 31 = 496 \quad \text{и} \quad 2 \cdot 7-1 \cdot (2 \cdot 7-1) = 26 \cdot (27-1) = 64 \cdot 127 = 8128.$$

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа, не зная, однако есть ли таковые еще и возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие формуле Евклида. Неразрешимая загадка совершенных чисел, бессилие разума перед их тайной, их непостижимость совершенные привели к признанию божественности этих удивительных чисел.

Один из наиболее выдающихся ученых средневековья, друг и учитель Карла Великого, аббат Алкуин (ок.735–804), один из виднейших деятелей просвещения (приложение 2), организатор школ и автор учебни-

ков по арифметике, был твердо убежден, что человеческий род только потому несовершенен, и в нем только потому царит зло, горе и насилие, что он произошел от восьми людей, спасшихся в ноевом ковчеге, а 8 – число несовершенное. До потопа род людской был более совершенен – он происходил от одного Адама, а единица может быть причислена к совершенным числам: она равна самой себе, своему единственному делителю. Алкуин жил в VIII веке. Но даже в XII веке церковь учила, что для спасения души вполне достаточно изучать совершенные числа, и тому, кто найдет новое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство. Но и жажда этой награды не смогла помочь математикам средневековья.

Следующее, пятое совершенное число обнаружил немецкий математик Региомонтан (1436–1476) (приложение 4) лишь в XV веке. Оказалось, что и пятое совершенное число также подчиняется условию Евклида. Не удивительно, что его так долго не могли найти. Гораздо более поражает то, что в пятнадцатом веке вообще смогли его обнаружить. Пятое совершенное число равно **33 550 336**, ему соответствует значение $p = 13$ в формуле Евклида.

Итальянец Пьетро Антонио Каталди (1548–1626), бывший профессором математики во Флоренции и Болонье (приложение 4), тоже для спасения своей души занимался поисками совершенных чисел. В его записках были указаны значения шестого и седьмого совершенных чисел:

8 589 869 056 – шестое число,
137 438 691 328 – седьмое число.

Навсегда осталась в истории загадочная тайна, как он сумел найти их. До сих пор предложено только одно объяснение этой загадке – оно было дано еще его современниками: помощь божественного провидения, подсказавшего своему избраннику верные значения двух совершенных чисел.

В дальнейшем поиск затормозился вплоть до середины XX века, когда с появлением компьютеров стали возможными вычисления, превосходившие человеческие возможности.

На январь 2018 года известно 50 чётных совершенных чисел, поиском новых чисел занимается проект распределённых вычислений GIMPS.

2. Нечётные совершенные числа

Нечётных совершенных чисел до сих пор не обнаружено, однако не доказано и то, что их не существует. Неизвестно также, бесконечно ли множество всех совершенных чисел.

Доказано, что нечётное совершенное число, если оно существует, имеет не менее

9 различных простых делителей и не менее 75 простых делителей с учетом кратности. Поиском нечётных совершенных чисел занимается проект распределённых вычислений OddPerfect.org. Распределённые вычисления — способ решения трудоёмких вычислительных задач с использованием нескольких компьютеров, чаще всего объединённых в параллельную вычислительную систему.

Свойства совершенных чисел

Все чётные совершенные числа, кроме 6, являются суммой кубов последовательных нечётных натуральных чисел

$$28 = 1^3 + 3^3;$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3;$$

$$8\,128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3.$$

Все чётные совершенные числа являются треугольными числами. Это значит, что, взяв совершенное число одинаковых монет, мы всегда сможем сложить из них равнобедренный треугольник (приложение 6).

Все четные совершенные числа являются шестиугольными числами (приложение 5) и, значит, могут быть представлены в виде $n \cdot (2n-1)$ для некоторого натурального числа n :

$$6 = 2 \cdot 3, \quad n = 2;$$

$$28 = 4 \cdot 7, \quad n = 4;$$

$$496 = 16 \cdot 31, \quad n = 16;$$

$$8\,128 = 64 \cdot 127, \quad n = 64.$$

Все чётные совершенные числа, кроме 6 и 496, заканчиваются в десятичной записи на 16, 28, 36, 56 или 76.

Все чётные совершенные числа в двоичной записи содержат сначала единиц, за которыми следует нулей, следствие из их общего представления.

Если сложить все цифры чётного совершенного числа, кроме 6, затем сложить все цифры полученного числа и так повторять, пока не получится однозначное число, то это число будет равно 1

$$2 + 8 = 10, \quad 1 + 0 = 1$$

$$4 + 9 + 6 = 19, \quad 1 + 9 = 10, \quad 1 + 0 = 1$$

Эквивалентная формулировка: остаток от деления чётного совершенного числа, отличного от 6, на 9 равен 1.

Интересные факты о совершенных числах

Чтобы понять, является ли число совершенным, необходимо проделывать определенные расчеты. Другого пути нет. И такие числа встречаются редко. Например, пифагореец Ямблих писал об идеальных числах как о явлении, встречающемся от мириады до мириады мириад, и затем от мириады мириад до мириад мириад мириад и т. д. Однако в XIX веке были проведены проверочные

расчеты, которые показали, что совершенные числа нам встречаются еще реже. Так, от 1020 до 1036 нет никакого совершенного числа, а если следовать Ямблиху, то их должно быть четыре.

Скорее всего, именно трудность нахождения таких чисел послужила поводом к наделению их мистическими свойствами. Хотя, опираясь на библейскую историю, ее исследователи сделали вывод, что мир сотворен действительно прекрасным и совершенным, ведь число дней творения – это 6. А вот человек неидеален, так как сотворен и живет в дне седьмом. Однако его задача – это стремиться к совершенству.

Давайте познакомимся с интересными фактами (приложение 7):

- 8 людей спаслось в Ноевом Ковчеге после всемирного потопа. Также в нем спаслись по семь пар чистых и нечистых животных. Если суммировать всех спасшихся в Ноевом Ковчеге, то выходит число 28, являющееся совершенным;

- руки человека – это совершенное оружие. Они имеют 10 пальцев, которые наделены 28 фалангами;

- луна совершает околоземные обороты каждые 28 дней;

- при начертании квадрата можно провести в нем диагонали. Тогда несложно будет заметить, что его вершины соединены 6 отрезками. Если то же проделать с кубом, то получится 12 ребер и 16 диагоналей. В сумме получится 28. Восьмиугольник тоже имеет причастность к совершенному числу 28 (20 диагоналей плюс 8 сторон). А семигранная пирамида имеет 7 ребер и 7 сторон основания с 14 диагоналями. В сумме это число 28;

- Лев Николаевич Толстой не раз шуточно "хвастался" тем, что дата его рождения 28 августа (по календарю того времени) является совершенным числом. Год рождения Л.Н. Толстого (1828) – тоже интересное число: последние две цифры 28 образуют совершенное число; если поменять местами первые цифры, то получится 8128 – четвертое совершенное число.

Анкетирование

Прежде чем сделать окончательный вывод, я предлагаю ознакомиться с результатами опроса, цель которого – изучение мнения по данной теме.

Опрос проводился среди следующих категорий:

- учащиеся 5 класса (25 человек);
- учителя (8 человек);
- родители школьников (17 человек).

Всего приняло участие 50 человек.

Опрос велся по следующим вопросам:

1. Знаете ли вы что такое совершенные числа?

2. Нужно ли изучать математику?

Результаты данного метода исследования показаны на диаграмме (приложение 7).

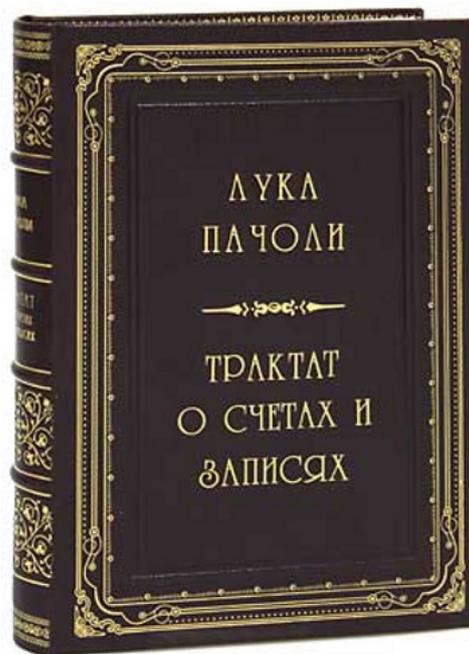
А еще я вместе со старшеклассниками провел небольшой блиц-опрос. Мы заходили в каждый класс и просили поднять руки кто любит математику. Ребята с интересом отнеслись к нашей просьбе. Меня порадовало, что большая часть школьников с любовью относится к данному предмету. Всем было весело и интересно. Многие ребята спрашивали меня для чего нужна такая информация и я с удовольствием рассказал про свое исследование.

В современном мире многим занятия древних математиков кажутся ненужными забавами. Но нельзя забывать, что с этих забав началось серьезное знакомство людей с числами. Числа стали не только применять, но и изучать.

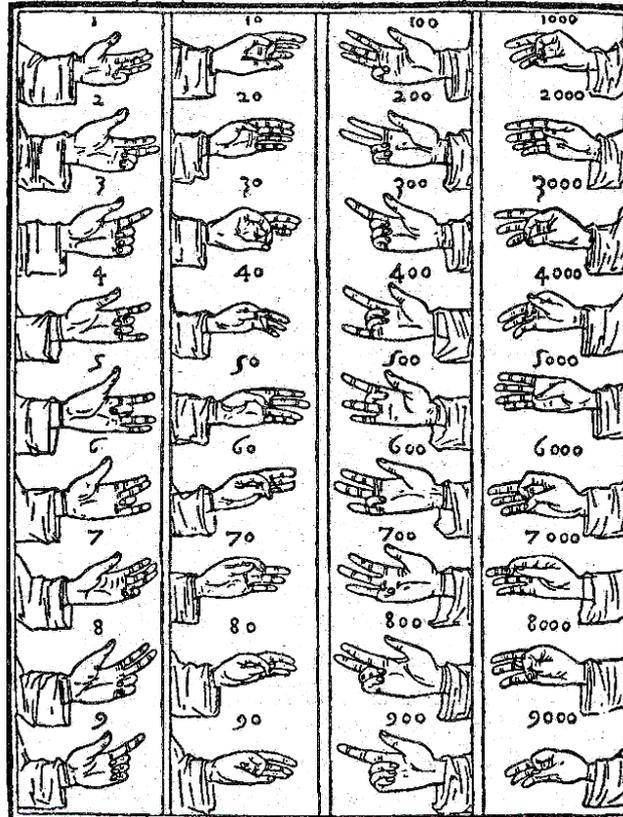
Совершенные числа не имеют широкого применения, поэтому и не изучаются на уроках математики.

Умение вычислять, логически мыслить, быть настойчивым и упорным, аккуратным и внимательным – эти качества необходимы каждому человеку. И, в то же время, они являются основой хорошего понимания математики. Математика – волшебная наука, которая помогает развивать эти способности и умения. Изучение математики можно сравнивать с нелёгким, но увлекательным путешествием по удивительной стране.

Приложение 1



«Сумма арифметики» Луки Пачоли



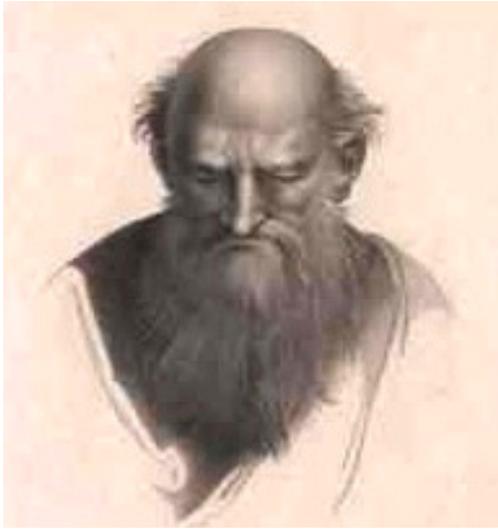
Распространённый в средневековой Европе и на Ближнем Востоке пальцевый счёт из книги «Сумма арифметики» итальянского математика Луки Пачоли

Приложение 2

Таблица поиска совершенных чисел с помощью калькулятора

Число	Делители														Сумма делителей	
1																0
2	1															1
3	1															1
4	1	2														3
5	1															1
6	1	2	3													6
7	1															1
8	1	2		4												7
9	1		3													4
10	1	2			5											8
11	1															1
12	1	2	3	4		6										16
13	1															1
14	1	2					7									10
15	1		3		5											9
16	1	2		4				8								15
17	1															1
18	1	2	3			6			9							21
19	1															1
20	1	2		4	5					10						22
21	1		3				7									11
22	1	2									11					14
23	1															1
24	1	2	3	4		6		8				12				36
25	1				5											6
26	1	2											13			16
27	1		3						9							13
28	1	2		4			7							14		28
29	1															1
30	1	2	3		5	6				10					15	42

Приложение 3
Великие математики



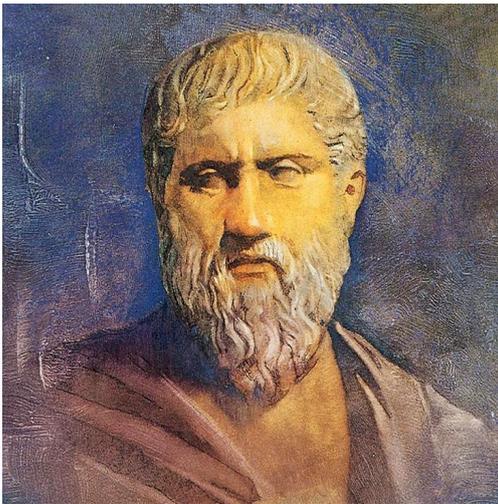
Никомах Герасский (I–II век н.э.)

ALCVIN PRECEPTOR DE
Charlemagne. Chap. 65.



аббат Алкуин (ок. 735–804)

Приложение 4
Великие математики



Платон (V–IV век до н.э.)



Региомонтан (1436–1476)



Евклид (365–300 до н.э.)



Пьетро Антонио Кательди (1548–1626)

Приложение 5



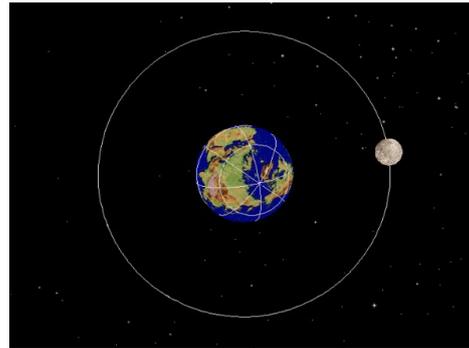
Здание Академии наук



Руки человека



Фёдор Бронников. Гимн пифагорейцев солнцу

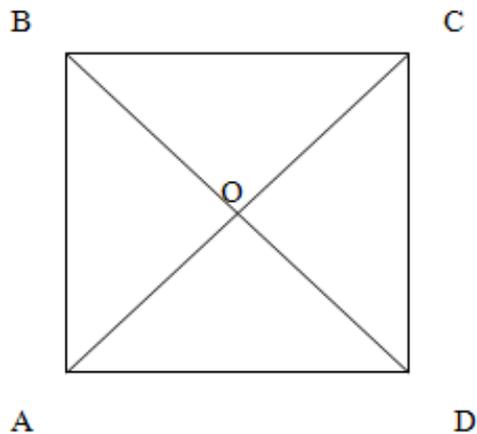


Луна совершает оборот вокруг Земли

Приложение 6



Треугольник из 28 монет



Квадрат

Приложение 7
Интересные факты о совершенных числах

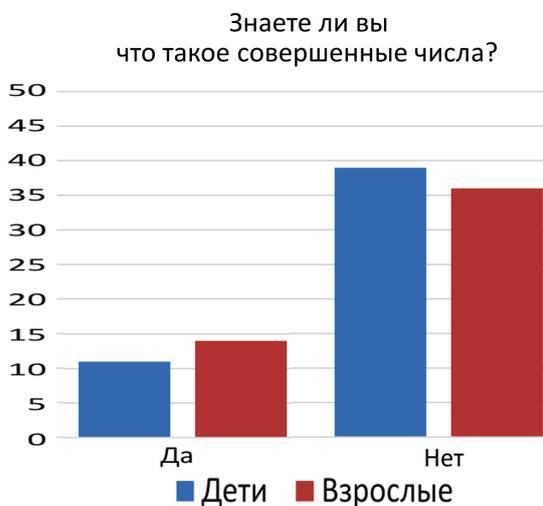


Ноев ковчег

Л. Н. Толстой

Приложение 8

Результаты исследования



Заключение

Среди всех интересных натуральных чисел, издавна изучаемых математиками, особое место занимают совершенные числа, обладающие рядом очень интересных свойств.

Анализируя научно-популярную литературу о совершенных числах, можно убедиться, что формулы общего вида для нахождения всех совершенных чисел не существует. Вопрос о существовании бесконечности множества четных совершенных чисел, нечетного совершенного числа открыт до сих пор.

Причем нередко одно и то же открытие происходило в разных точках земного шара, довольно часто повторялось несколько раз, совершенствовалось, а позже распространялось и становилось достоянием всех народов. Математика невольно связывает единой нитью народы мира. Она заставляет их сотрудничать и общаться между собой.

Мир полон тайн и загадок. Но разгадать их могут только пытливые.

Современная наука встречается с величинами такой сложной природы, что для их изучения приходится изобретать все новые виды чисел. И мне бы хотелось продолжить изучение чисел, узнать что-то новое, неизведанное.

Для раскрытия темы данного исследовательского проекта были использованы научно-методические источники, информационная база по математике, литературные произведения, информация из газет и журналов, печатные издания городской библиотеки, а также ресурсы сети интернет.

Список литературы

1. Берман Г.Н. Число и наука о нем. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 164 с.
2. Википедия, информация по запросу «совершенные числа».
3. Гейзер Г.И., История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.
4. Демман, И. Я Совершенные числа // Квант. – 1991. – № 5. – С. 13–17.
5. Демман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики. Пособие для учащихся 5-6 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1989. — 287 с.
6. Карпаченко Е. Тайны чисел. Математика /Прил. К газете «Первое сентября» №13 2007.
7. Крылов А.Н., Числа и меры. Математика/ Прил. К газете «Первое сентября» №7 – 1994
8. В работе использованы картинки и фотографии по запросу «Поиск картинки» в Internet.