

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Иванов М.С.

г. Ижевск, МБОУ «СОШ № 32», 7 «Б» класс

Руководитель: Родионова Л.Н., г. Ижевск, МБОУ «СОШ № 32», учитель математики

На протяжении всей жизни мы спокойно пользуемся числами, выполняем арифметические операции над ними, и нас это не удивляет. Мы воспринимаем это как факт. Однако так было не всегда. В глубокой древности перед людьми стояла проблема обозначения числовой информации. Как люди считали в те времена? Что такое система счисления? Как они используются в настоящее время? Меня эта тема очень заинтересовала.

Цель: изучить способы записи информации о количестве объектов.

Методы исследования: теоретическое исследование.

Задачи:

- Изучить литературу, посвящённую системам счисления;
- Установить связь и отличия систем нумерации некоторых народов;
- Узнать, как используются системы счисления в настоящее время.

Основная часть

Ей было 1100 лет,
Она в 101 класс ходила,
В портфеле по 100 книг носила –
Все это правда, а не бред,
Когда пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий .
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно,
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

В математике, как и в русском языке, существует свой, математический алфавит. Главными элементами математического алфавита являются цифры – числовой алфавит, с помощью которых мы кодируем числа. А чем эти числа отличаются? Позицией цифры в числе.

Но мы не можем писать так, как нам вздумается. Записанные нами числа должны быть понятны другим людям. Поэтому, при записи числа, необходимо ещё использовать и определенные правила.

Понятие системы счисления

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с использованием особых знаковых систем, которые называются системами счисления. Алфавит систем счисления состоит из символов, которые называются цифрами. К примеру, в десятичной системе счисления числа записываются с помощью десяти всем хорошо известных цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Древнее изображение десятичных цифр выбрано не случайно: ведь каждая цифра обозначает такое число, которое равно количеству углов в ней. Например, 0 – углов нет, 1 – один угол, 2 – два угла и т.д.



Система счисления – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

Все системы счисления делятся на две большие группы: позиционные и непозиционные системы счисления. В позиционных системах счисления значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных – не зависит. Непозиционные системы счисления возникли раньше позиционных.

Непозиционные системы счисления

Непозиционной системой счисления называется такая система счисления, у которой количественный эквивалент («вес») цифры не зависит от ее местоположения в записи числа.

Сначала люди просто различали ОДИН предмет перед ними или нет. Если предмет был не один, то говорили «МНОГО».

Первыми понятиями математики были «меньше», «больше», «столько же».

Когда одно племя меняло пойманных рыб на сделанные людьми другого племени каменные ножи, им не нужно было считать, сколько принесли рыб и сколько ножей. Достаточно было положить рядом с каждой рыбой по ножу, чтобы обмен между племенами состоялся.

Счет появился тогда, когда человеку потребовалось сообщать своим соплеменникам о количестве найденных им предметов.

И, так как многие народы в древности не общались друг с другом, то у разных народов возникли разные системы счисления и представления чисел и цифр.

Числом обозначали некоторые реальные объекты, свойства которых были одинаковы. Когда мы что-то считаем или пересчитываем, мы как бы обезличиваем предметы, т.е. подразумеваем, что их свойства одинаковы. Но самым главным свойством числа является наличие объекта, т.е. единица и его отсутствие, т.е. ноль.

У первобытного человека орудием счета были преимущественно пальцы (приложение 1).

Пальцы оказались прекрасной вычислительной машиной. В древние времена люди ходили босиком. Поэтому они могли пользоваться для счета пальцами как рук, так и ног. До сих пор существуют в Полинезии племена, использующие такую систему счисления. Пальцевой счет сохранился кое-где и поныне. Например, на крупнейшей мировой хлебной бирже в Чикаго предложения и запросы, как и цены, объявляются маклерами на пальцах без единого слова.

Довольно широкое распространение имела двенадцатеричная система счисления. Происхождение её связано со счетом на пальцах. Считали большим пальцем руки фаланги остальных четырех пальцев: всего их 12.

Элементы двенадцатеричной системы счисления сохранились в Англии в системе мер (1 фут = 12 дюймам) и в денежной системе (1 шиллинг = 12 пенсам). Нередко и мы сталкиваемся в быту с двенадцатеричной системой счисления: чайные и столовые сервизы на 12 персон, комплект носовых платков – 12 штук.

Числа в английском языке от одного до двенадцати имеют свое название, последующие числа являются составными (приложение 2).

Запоминать большие числа было трудно, поэтому к «счетной машине» рук и ног стали добавлять различные приспособления. Потребность в записи чисел появилась в очень древние времена, как только люди начали считать. Количество предметов изображалось нанесением чётрочек или засечек на какой – либо твёрдой поверхности: камне, глине, дереве (до изобретения бумаги было ещё очень и очень далеко). Каждому объекту в такой записи соответствовала одна чётрочка. Археологами найдены такие «записи» при раскопках культурных слоёв, относящихся к периоду палеолита (10 – 11 тысяч лет до н.э.).

Учёные назвали этот способ записи чисел единичной («палочной») системой

счисления. В ней для записи чисел применялся только один вид знаков – «палочка». Каждое число в такой системе счисления обозначалось с помощью строки, составленной из палочек, количество которых и равнялось обозначаемому числу. Перуанцы употребляли для запоминания чисел разноцветные шнуры с завязанными на них узлами. Интересный способ для записи чисел использовался индийскими цивилизациями примерно в VIII веке до нашей эры. Они применяли «узелковое письмо» – связанные между собой нити. Знаками на этих нитях служили узелки, часто с вплетенными в них камнями или ракушками. Узелковая запись чисел позволяла Инкам передавать информацию о числе воинов, обозначать количество умерших или родившихся в той или иной провинции и так далее.

Древнеегипетская десятичная система счисления (2,5 тысяч лет до н.э.) – примерно в третьем тысячелетии до нашей эры древние египтяне придумали свою числовую систему, в которой для обозначения ключевых чисел 1, 10, 100 и т.д. использовались специальные значки – иероглифы.

Все остальные числа составлялись из этих ключевых при помощи операции сложения. Система счисления Древнего Египта является десятичной, но непозиционной и аддитивной.

Римская десятичная система счисления (2 тысячи лет до н.э. и до наших дней) – самая распространенная из непозиционных систем счисления. В ней для записи чисел используются буквы латинского алфавита. При этом буква I всегда означает единицу, буква – V пять, X – десять, L – пятьдесят, C – сто, D – пятьсот, M – тысячу и т.д. Величина числа в римской системе счисления определяется как сумма или разность цифр в числе. Главная проблема с римскими цифрами заключается в том, что сложно производить умножение и деление. Другим недостатком римской системы является то, что запись больших чисел требует введения новых символов. А дробные числа можно записывать только как отношение двух чисел. Тем не менее, они были основными до конца средних веков. Но и в наше время их ещё используют.

Славянская кириллическая десятичная алфавитная – эта нумерация была создана вместе со славянской алфавитной системой для перевода священных библейских книг для славян греческими монахами братьями Кириллом и Мефодием в IX веке. Эта форма записи чисел получила большое распространение в связи с тем, что имела полное сходство с греческой записью чисел. До XVII века эта форма записи чисел была

официальной на территории современной России, Белоруссии, Украины, Болгарии, Венгрии, Сербии и Хорватии. До сих пор православные церковные книги используют эту нумерацию.

Числа записывали из цифр так же слева, направо, от больших к меньшим. Числа от 11 до 19 записывались двумя цифрами, причем единица шла перед десятком: ДІ = 14

Читаем дословно «четырнадцать» – «четыре и десять». Как слышим, так и пишем: не $10 + 4$, а $4 + 10$, – четыре и десять. Числа от 21 и выше записывались наоборот, сначала писали знак полных десятков.

Запись числа, использованная славянами аддитивная, то есть в ней используется только сложение: $WГ = 863 = 800 + 60 + 3$

Для того чтобы не перепутать буквы и цифры, использовались титла – горизонтальные черточки над числами, что мы видим на рисунке (приложение 3).

Недостатки непозиционных систем счисления:

1. Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.

2. Невозможно представлять дробные и отрицательные числа.

3. Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения. В частности, у всех народов наряду с системами счисления были способы пальцевого счета, а у греков был счетная доска абак – что-то наподобие наших счетов.

Вплоть до конца средневековья не существовало никакой универсальной системы записи чисел. Только с развитием математики, физики, техники, торговли, финансовой системы возникла потребность в единой универсальной системе счисления, хотя и сейчас многие племена, нации и народности используют другие системы счисления.

Но мы до сих пор пользуемся элементами непозиционной системы счисления в обыденной речи, в частности, мы говорим сто, а не десять десятков, тысяча, миллион, миллиард, триллион.

Позиционные системы счисления

Позиционной системой счисления называется такая система счисления, у которой количественный эквивалент («вес») цифры зависит от ее местоположения в записи числа.

Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.

Основание позиционной системы счисления – количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.

За основание можно принять любое натуральное число – два, три, четыре, ..., обозначив новую позиционную систему: двоичную, троичную, четверичную и т.д.

Десятичная система счисления

Десятичная система счисления – в настоящее время наиболее известная и используемая. Изобретение десятичной системы счисления относится к главным достижениям человеческой мысли. Без нее вряд ли могла существовать, а тем более возникнуть современная техника. Причина, по которой десятичная система счисления стала общепринятой, вовсе не математическая. Люди привыкли считать в десятичной системе счисления, потому что у них по 10 пальцев на руках.

Десятичная система впервые появилась в Индии примерно в VI веке новой эры. Индийская нумерация использовала девять числовых символов и нуль для обозначения пустой позиции. В ранних индийских рукописях, дошедших до нас, числа записывались в обратном порядке – наиболее значимая цифра ставилась справа. Но вскоре стало правилом располагать такую цифру с левой стороны. Особое значение придавалось нулевому символу, который вводился для позиционной системы обозначений. Индийская нумерация, включая нуль, дошла и до нашего времени. В Европе индусские приемы десятичной арифметики получили распространение в начале XIII в. благодаря работам итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Европейцы заимствовали индийскую систему счисления у арабов, назвав ее арабской. Это исторически неправильное название удерживается и поныне.

Десятичная система использует десять цифр – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а также символы «+» и «-» для обозначения знака числа и запятую или точку для разделения целой и дробной частей числа.

Двоичная, восьмеричная и десятичная системы счисления

В вычислительных машинах используется двоичная система счисления, ее основание – число 2. Для записи чисел в этой системе используют только две цифры – 0 и 1. Вопреки распространенному заблуждению, двоичная система счисления была придумана не инженерами-конструкторами ЭВМ, а математиками и философами задолго до появления компьютеров, еще в XVII – XIX веках. Первое опубликованное обсуждение двоичной системы счисления принадлежит испанскому священнику Хуану Карамюэлю Лобковицу (1670 г.). Всеобщее внимание

к этой системе привлекла статья немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница, опубликованная в 1703 г. В ней пояснялись двоичные операции сложения, вычитания, умножения и деления. Лейбниц не рекомендовал использовать эту систему для практических вычислений, но подчёркивал её важность для теоретических исследований. Со временем двоичная система счисления становится хорошо известной и получает развитие.

Выбор двоичной системы для применения в вычислительной технике объясняется тем, что электронные элементы – триггеры, из которых состоят микросхемы ЭВМ, могут находиться только в двух рабочих состояниях.

С помощью двоичной системы кодирования можно зафиксировать любые данные и знания. Это легко понять, если вспомнить принцип кодирования и передачи информации с помощью азбуки Морзе. Телеграфист, используя только два символа этой азбуки – точки и тире, может передать практически любой текст.

Двоичная система удобна для компьютера, но неудобна для человека: числа получаются длинными и их трудно записывать и запоминать. Конечно, можно перевести число в десятичную систему и записывать в таком виде, а потом, когда понадобится перевести обратно, но все эти переводы трудоёмки. Поэтому применяются системы счисления, родственные двоичной – восьмеричная и шестнадцатеричная. Для записи чисел в этих системах требуется соответственно 8 и 16 цифр. В 16-теричной первые 10 цифр общие, а дальше используют заглавные латинские буквы. Шестнадцатеричная цифра А соответствует десятичному числу 10, шестнадцатеричная В – десятичному числу 11 и т.д. Использование этих систем объясняется тем, что переход к записи числа в любой из этих систем от его двоичной записи очень прост.

В программистских кругах шестнадцатеричные числа принято предварять значком 0х (например, 0x4D2), такое написание пошло от языка программирования С, либо значком \$ (например, \$4D2), такая нотация произошла от языка программирования Pascal. Иногда в литературе используют буквы «h» (от англ. hexadecimal) и «b» (от англ. binary) для обозначения соответственно шестнадцатеричных и двоичных чисел (например, FFh или 1011b).

Правила перевода из одной системы счисления в другую

Перевод чисел из одной системы счисления в другую составляет важную часть

машинной арифметики. Рассмотрим основные правила перевода.

1. Для перевода двоичного числа в десятичное необходимо его записать в виде суммы, состоящей из одночленов, которые в свою очередь состоят из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 2, и вычислить по правилам арифметики:

$$X_2 = A_n 2^{n-1} + A_{n-1} 2^{n-2} + \dots + A_2 2^1 + A_1 2^0$$

Где А – цифры числа, записанного в данной системе счисления;

n – количество разрядов числа.

При переводе удобно пользоваться таблицей степеней двойки (Приложение 4).

Пример. Число 11101000_2 перевести в десятичную систему счисления.

$$11101000_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 232_{10}$$

2. Для перевода восьмеричного числа в десятичное необходимо его записать в виде суммы, состоящей из одночленов, которые в свою очередь состоят из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 8, и вычислить по правилам арифметики:

$$X_8 = A_n \cdot 8^{n-1} + A_{n-1} \cdot 8^{n-2} + \dots + A_2 \cdot 8^1 + A_1 \cdot 8^0$$

При переводе удобно пользоваться таблицей степеней восьмерки (Приложение 5).

Пример. Число 75013_8 перевести в десятичную систему счисления.

$$75013_8 = 7 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 31243_{10}$$

Пример. Число 75013_8 перевести в десятичную систему счисления.

$$75013_8 = 7 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 31243_{10}$$

3. Для перевода шестнадцатеричного числа в десятичное необходимо его записать в виде суммы одночленов, которые в свою очередь состоят из произведений многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 16, и вычислить по правилам арифметики:

$$X_{16} = A_n \cdot 16^{n-1} + A_{n-1} \cdot 16^{n-2} + \dots + A_2 \cdot 16^1 + A_1 \cdot 16^0$$

При переводе удобно пользоваться таблицей степеней числа 16 (Приложение 6).

Пример. Число $FDA1_{16}$ перевести в десятичную систему счисления.

$$FDA1_{16} = 15 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 64929_{10}$$

4. Для перевода десятичного числа в двоичную систему его необходимо последовательно делить на 2 до тех пор, пока не

останется остаток, меньший или равный 1. Число в двоичной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример. Число 22_{10} перевести в двоичную систему счисления (Приложение 7).

$$22_{10} = 10110_2$$

5. Для перевода десятичного числа в восьмеричную систему его необходимо последовательно делить на 8 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 7. Число в восьмеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример. Число 571_{10} перевести в восьмеричную систему счисления (Приложение 8).

$$571_{10} = 1073_8$$

6. Для перевода десятичного числа в шестнадцатеричную систему его необходимо последовательно делить на 16 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 15. Число в шестнадцатеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример. Число 7467_{10} перевести в шестнадцатеричную систему счисления (Приложение 9).

$$7467_{10} = 1D2B_{16}$$

7. Чтобы перевести число из двоичной системы в восьмеричную, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда. В случае необходимости нужно дополнить старшую триаду нулями и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой.

Пример. Число 1001011_2 перевести в восьмеричную систему счисления.

$$001\ 001\ 011_2 = 113_8$$

8. Чтобы перевести число из двоичной системы в шестнадцатеричную, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую тетраду нулями, и каждую тетраду заменить соответствующей восьмеричной цифрой.

Пример. Число 1011100011_2 перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

$$0010\ 1110\ 0011_2 = 2E3_{16}$$

9. Для перевода восьмеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой.

Пример. Число 531_8 перевести в двоичную систему счисления.

$$531_8 = 101011001_2$$

10. Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной тетрадой.

Пример. Число $EE8_{16}$ перевести в двоичную систему счисления.

$$EE8_{16} = 111011101000_2$$

11. При переходе из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему.

Пример 1. Число FEA_{16} перевести в восьмеричную систему счисления.

$$FEA_{16} = 111111101010_2$$

$$111\ 111\ 101\ 010_2 = 7752_8$$

Пример 2. Число 6635_8 перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

$$6635_8 = 110110011101_2$$

$$1101\ 1001\ 1101_2 = D9D_{16}$$

При изучении данной темы, мне захотелось научиться выполнять действия с числами, записанными в различных системах счисления. Пока я рассмотрел только двоичную систему.

Сложение:

1001

1010

10011

Вычитание:

1110

0101

1001

Умножение:

1110

0101

1110

0000

1110

0000

1000110

Деление:

1000110|101

101 -----

---- 0001110

111

101

101

101

00

Задача

На одной из старых улиц Москвы стоят два дома, на фасадах которых обозначены даты их постройки:

MDCCCCV и MDCCCLXXXIX

В каком году построен каждый дом?

Ответ.

Первый дом был построен в 1905 году.

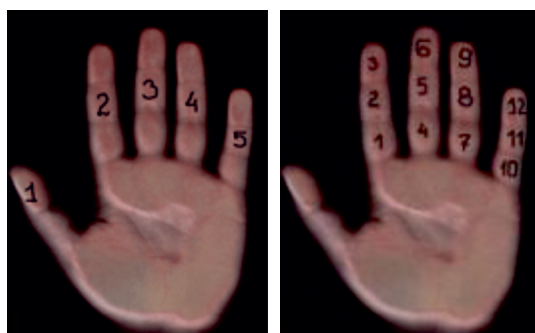
Второй дом был построен в 1899 году.

Заключение

В ходе исследовательской работы я для себя выяснил очень многое. А именно, что система счисления – это система записи чисел, в которой используется специальный алфавит или определенный набор цифр. Узнал, что сначала были придуманы позиционные системы счисления, имеющие в основном анатомическое происхождение. Но потом путём проб и ошибок человек избрал для себя подходящие ему системы счисления – позиционные. Например, самая распространенная, десятичная система счисления, которой мы пользуемся повседневно и никогда не задумываемся о том, что

можно считать и по-другому. Ну а такие системы счисления, как двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная, широко применяются в компьютерных технологиях. Данная работа носит, в основном, реферативный характер, но мне хотелось бы продолжить работу по этой теме и, может быть, создать свою систему счисления, а также более подробно узнать о сфере применения различных систем счисления.

Приложение 1



Приложение 2

1 -- one	2 -- two	3 -- three	4 -- four	5 -- five	6 -- six
7 -- seven	8 -- eight	9 -- nine	10 -- ten	11 -- eleven	12 -- twelve

Приложение 3

А	В	Г	Д	Е	З	И	Й	О
аз	веди	глаголь	добро	есть	зело	земля	иже	фита
1	2	3	4	5	6	7	8	9
І	К	Л	М	Н	Ж	О	П	Ч
и	како	люди	мыслете	наш	кси	он	покой	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Щ	Ъ
рцы	слово	твердь	ук	ферт	жа	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

звезда – 1000 руб. колесо – 100 руб квадрат – 10 руб X – 1 руб - 1 копейка		1232 рубля 24 копейки
--	--	--------------------------

Приложение 4

n (степень)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

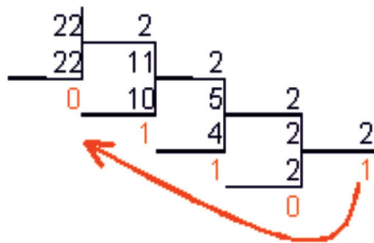
Приложение 5

n (степень)	0	1	2	3	4	5	6
8^n	1	8	64	512	4096	32768	262144

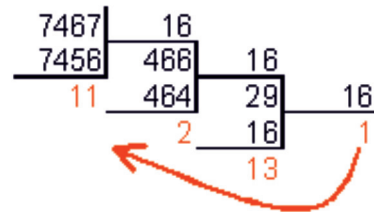
Приложение 6

n (степень)	0	1	2	3	4	5	6
16^n	1	16	256	4096	65536	1048576	16777216

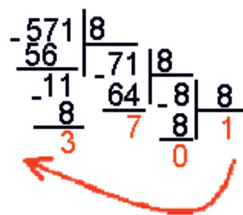
Приложение 7



Приложение 9



Приложение 8



Список литературы

1. https://ru.wikibooks.org/wiki/Системы_счисления
2. http://иванов-ам.рф/informatika_10/informatika_materialy_zanytii_10_04.html
3. <http://fb.ru/article/341659/informatika---sistema-schisleniya-vidyi-sistem-schisleniya>
4. http://mschool.kubsu.ru/mmff/index.php?option=com_content&view=article&id=190
5. Данн-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. М., 1986.