ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА О СОЕДИНЕНИИ ВОСЬМИ ВЕРШИН КУБА САМОЙ КОРОТКОЙ ЛИНИЕЙ

Драцкая А.И.

г.о. Королёв, МБОУ «Гимназия №5», кружок «Юный физик – умелые руки», 5 класс

Руководитель: Скворцова А.А., г. Москва, НИУ МАИ, студент, лауреат гранта 500.000 рублей конкурса и программы «УМНИК», стипендиат Правительства РФ

В 2014 году мною была начата работа об исследовании свойств силовых арматурных ячеек новых композиционных материалов на основе аналогии с мыльными плёнками, то есть с позиции математической теории минимальных поверхностей. Дальнейшее исследование было расширено в нескольких направлениях, в том числе для создания новых облёгчённых квадратных ячеек для арматурных сеток в строительстве и в авиационно-космической технике. Расчёт характеристик новых силовых ячеек по формулам выполняли студенты, а мне было поручено проводить опыты и заниматься дальнейшим изучением многообразных силовых структур, наблюдая за мыльными плёнками, натянутыми на проволочный кубический каркас – это моя часть работы. Такое наблюдение позволило получить новый геометрический результат с мировым уровнем новизны. Классическая задача Штейнера о соединении четырёх вершин квадрата самой короткой линией изучается в углублённом курсе геометрии и сводится к получению линии из пяти отрезков. Новое обобщение задачи Штейнера свелось к соединению восьми вершин куба самой короткой линией. Глядя на мыльные плёнки на кубическом каркасе, мною сначала был предложен вид этого решения из двенадцати отрезков: квадрат в центре куба, из каждой вершины квадрата к ближайшей вершине куба проводится два отрезка. Такое решение было изучено аналитически студентами с целью определения размеров отрезков при самом коротком соединении вершин куба такой линией. Оказалось, что квадрат в середине должен быть по линейным размерам приблизительно в три раза меньше грани куба. Но это решение оказалось ошибочным, приближённым. Есть более короткая линия, форму которой я определила. В математике форму линии называют топологией. Новый вид решения, предложенный мною на основе мыльных плёнок, содержит не 12, а 13 отрезков, которые являются комбинацией решений плоской и объёмной задач Штейнера, обладают мировым уровнем новизны и позволяют создать более лёгкую ячейку нового прочного композиционного материала.

Основная часть

Прямой метод решения задачи Штейнера о соединении восьми вершин куба самой короткой линией

В авиационной и космической технике требуется создавать конструкции минимальной массы при соблюдении заданной прочности и размеров. В последнее время в науке и технике всё чаще упоминают композиционные материалы, основу которых составляет силовое волокно, окружённое наполнителем. Композиционные материалы начали широко применяться в авиационной технике при изготовлении несущих поверхностей самолётов. Например, крылья пассажирских самолётов всё чаще начинают изготавливать из углепластика. Композиционные материалы не подвержены коррозии, однако у них проявляются другие новые нежелательные свойства, например, гигроскопичность. Крыло, изготовленное из углепластика, хорошо впитывает влагу, увеличивая свой вес.

В этой работе я изучаю вопрос возможности создания лёгкого силового каркаса для перспективного композиционного материала. Актуальность работы связана с уменьшением массы конструкций из перспективного материала при сохранении и даже повышении прочностных характеристик [1–7]. Новизна работы заключается в предложении физической аналогии каркаса с мыльными плёнками как минимальными поверхностями, теория которых в настоящее время только начинает разрабатываться.

Мыльные плёнки натягиваются на контур заданной формы, образуя так называемую минимальную поверхность. С научной точки зрения этот термин является спорным, потому что не всегда получается поверхность минимальной площади. Например, мыльная плёнка натягивается на два кольца с общей осью в виде катеноида, а не цилиндра, потому что средняя кривизна поверхности должна быть минимальной. Физическая суть аналогии предложенного метода заключается в природном явлении мыльных пузырей. Мыльные пузыри и оболочки существуют достаточно долго, потому что они прочные. Естественно, возникает желание перенести эту прочную конструкцию на конкретный образец перспективной техники. Более того, мыльные пузыри легко поднимаются в воздухе, если внутри них тёплый воздух или лёгкий газ. Это означает, что минимальным поверхностям присуща минимальная масса. Следовательно, мыльные оболочки, натянутые на заданные конструкционные контуры, являются лёгкими и прочными конструкциями. Эти два важных свойства надо использовать при создании нового лёгкого и прочного композиционного материала.

В работах [1–7] было показано, как можно изготовить для нового композиционного материала силовую ячейку кубической формы. Для этого достаточно изучить форму мыльных плёнок, натянутых на кубический каркас, а потом перенести эту форму на новую конструкцию ячейки. Сначала мыльная плёнка натягивается на проволочный кубический каркас по шести граням куба. Однако очень скоро мыльная плёнка принимает другую форму, в виде треугольников и трапеций, сходящихся к маленькому пустому квадрату в середине. Форма такой наиболее распространённой формы мыльной плёнки, натянутой на кубический проволочный каркас, предложена мною студентам для изучения с различных позиций (площади, массы, размеров, устойчивости и т.д.) и представлена на рис. 1.

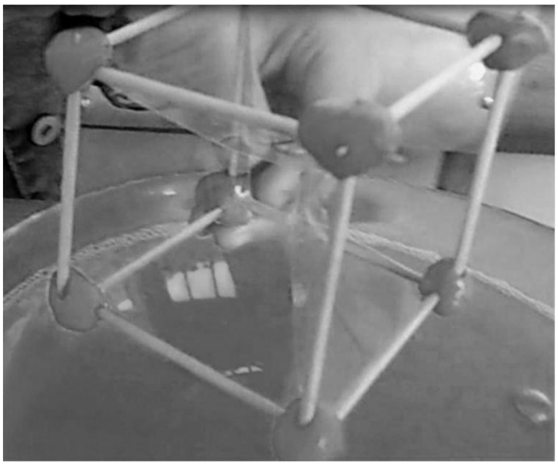


Рис. 1. Минимальная поверхность плёнок на кубическом каркасе

Вообще говоря, существует ещё одна комбинация минимальной поверхности мыльных плёнок на кубическом проволочном каркасе – это несколько трапеций, сходящихся к маленькому кубику в середине, но у кубика грани искривлены. Такая комбинация пока не изучается, но подтверждает сложность задач о минимальных поверхностях, общая математическая теория которых в настоящее время не создана.

Полученная форма минимальных мыльных поверхностей на кубическом каркасе была перенесена на модель нового лёгкого и прочного композиционного материала. Модель композиционного материала с такими ячейками была изготовлена из бумаги и покрыта лаком. Было изготовлено семь панелей из такого материала для иллюстрации прочностных и массовых свойств. О бумажных плёночных моделях я рассказала в прошлой статье, которая участвовала в конкурсе «V Старт в науке». В этой статье, представленной на конкурс «VI Старт в науке», изучается только силовой прочный каркас квадратной и кубической ячеек композиционного материала.

Задача Штейнера для квадрата – это соединение четырёх вершин квадрата самой короткой линией. На рис. 2 показана проволочная модель такого соединения.

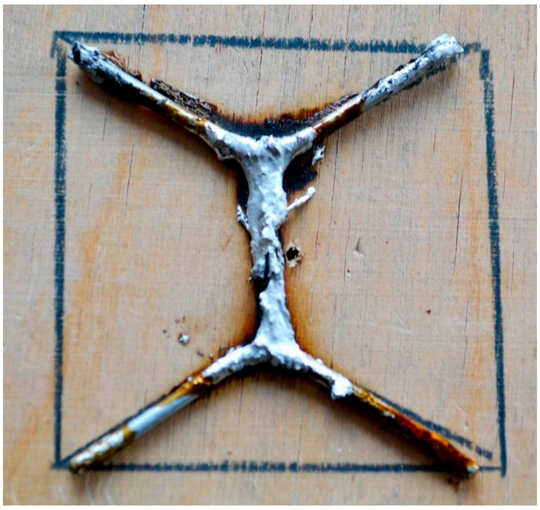


Рис. 2. Самое короткое соединение вершин квадрата

Штейнер решал эту задачу по формулам, а я увидела форму жучка из опыта с мыльными плёнками. Вид этого решения можно получить сразу, если посмотреть сбоку на мыльные плёнки, натянутые на кубический проволочный каркас. Сбоку на рис.1 виден точно такой же жучок.

Следующей задачей было найти длину перемычки жучка, чтобы соединительная линия была самой короткой. Штейнер решал эту задачу очень сложно по формулам, а я провела много измерений на миллиметровой бумаге. Я начертила фигуру-жучок на миллиметровой бумаге. Я постепенно изменяла длину перемычки и измеряла длину всех линий. Измерения сразу записывала в таблицу и переносила в компьютер, чтобы сразу построить график. Получился график длины соединительной линии от длины перемычки, показанный на рис. 3. Слева на рис.3 показан столбик чисел моих измерений.

ра для квадрата, то надо попытаться таким же физическим методом решить эту задачу для куба. Плёнки натянутся на проволочный кубический каркас по самым маленьким поверхностям, поэтому можно попытаться найти там самую короткую соединительную линию. Для решения этой задачи я провела опыт с мыльными плёнками на ку-

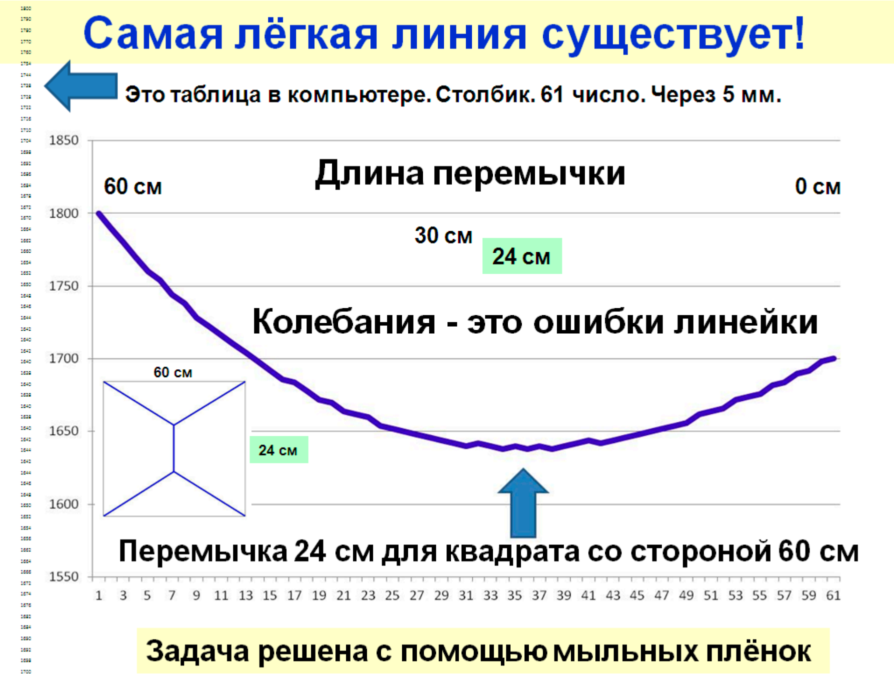


Рис. 3. Определение длины перемычки

Для самой короткой соединительной линии длина перемычки оказалась равна 24 см при стороне квадрата 60 см.

Потом для таких измерений я изготовила специальную модель из металлических планок и повторила измерения. Результат оказался таким же. Студенты МГСУ-МИСИ решали эту задачу формулами и получили приблизительно такой же результат. Моя ошибка оказалась всего 6 %, но я решила задачу физическими способами за час, а студенты решали её неделю. Ошибка измерений на первый взгляд может показаться большой, но на самом деле соответствует школьной линейке с классом точности 4, то есть 4 %.

Более сложной является задача Штейнера о соединении восьми вершин куба самой короткой линией. Если удалось с помощью мыльных плёнок решить задачу Штейнебическом проволочном каркасе и стала изучать маленький пустой квадрат в середине. Одновременно эту задачу решали студенты по форме линии, которую я им сказала. Мы соревновались, кто быстрее решит эту задачу. Я решила задачу опытным путём, простыми измерениями длинной линейкой или рулеткой за одно занятие в школьном кружке, примерно за два или три часа, а студенты решали эту задачу формулами в своём студенческом кружке два месяца. Результаты совпали. На рис.4 слева показана фотография точной проволочной модели, которая сделана по формулам студентов, а справа показана фотография мыльных плёнок, натянутых на проволочный кубический каркас. Я специально сделала размеры двух фотографий одинаковыми, чтобы сравнить точное решение студентов с моим опытным решением с помощью линейки и рулетки.

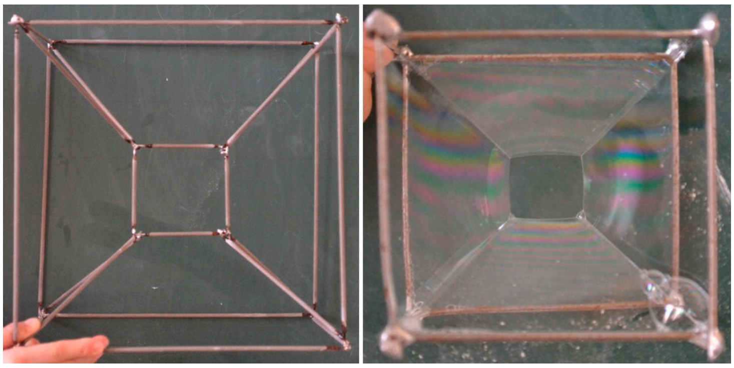


Рис. 4. Слева теория, справа опыт – полное совпадение

Студенты решали задачу Штейнера о соединении восьми вершин куба самой короткой линией с помощью формул, а я с помощью модели кубика из металлических планок. На кубический каркас я натягивала нитку, изменяла размеры квадрата в середине от точки до большого квадрата грани и записывала измерения в таблицу. Оказалось, что можно изучить 1/8 часть куба, а потом полученную длину линии умножить на 8. Схема измерений показана на рис.5. Это очень важно для повышения точности. Кубик можно сделать очень большим и на него натягивать нитки для измерений. В моём опыте ребро 1/8 куба было 2 метра, то есть 2000 мм. Это ребро из металлической планки я прислонила к углу школьного кабинета, а на полу начертила квадрат размерами тоже 2 метра на 2 метра. Точка C оказалась на металлической планке на самом верху, а грань *DRGM* была начерчена на полу кабинета. Я изменяла размеры квадрата в середине кубика, который виден на рис.4, от точки до самого большого квадрата, то есть до грани куба со стороной 2 метра. При каждом измерении длины линии *ABC* я изменяла расстояние *BD* на 5 мм от нуля до длины диагонали *DG*. В таблице EXCEL я сразу записывала в первый столбик длину линии *BC*, во второй столбик длину линии *AB*, в третий столбик сумму этих длин, то есть длину линии *ABC*, которую компьютер сам вычислял. В четвёртом столбике длина линии *ABC* была умножена на 8 – это компьютер тоже сам вычислил. Перевёрнутый на бок школьный кабинет показан на рис. 5.

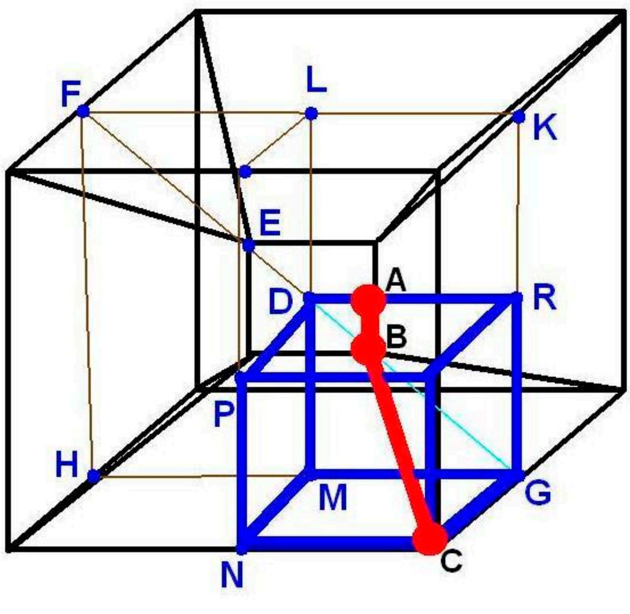


Рис. 5. Замена все линии одной восьмой частью

Четвёртый столбик в таблице EXCEL я выделила и нажала на кнопку «Диаграмма», то есть график. Результат получен в виде графика длины всей линии от стороны маленького квадрата в середине. Этот результат скопирован с экрана компьютера и показан на рис. 6.

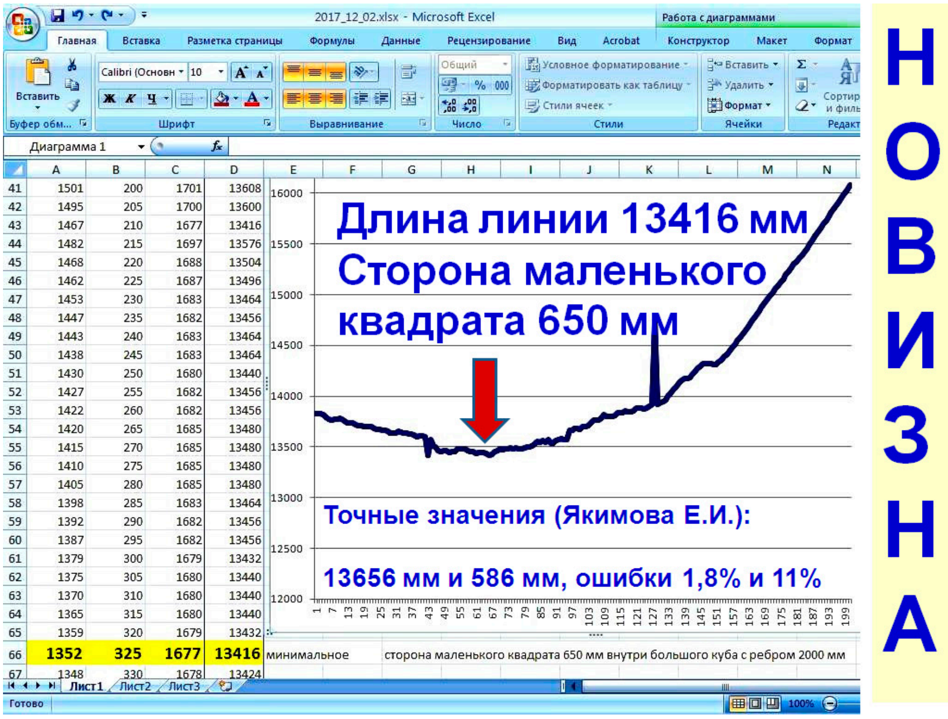


Рис. 6. Решение задачи Штейнера для куба

Результат решения задачи Штейнера о соединении восьми вершин куба самой короткой линией очень похож на решение задачи Штейнера для квадрата. Есть такая же ямка для стороны маленького квадрата в середине, в которой получается самая короткая длина всех дорожек с перекрёстками, но уже для куба, а не для квадрата.

Я получила результат мировой новизны!

Физический опыт не всегда может изобразить точное математическое решение задачи. Так получилось и здесь. Мыльные плёнки могут натягиваться по поверхностям, но не могут натягиваться по линиям, иначе они порвутся, как тоненькие ниточки. Если бы удалось сделать эти ниточки очень прочными, то на кубике на рис.4 была бы другая картинка. Мне сказали, что такие картинки называются топологиями, то есть формами.

Результат решения задачи Штейнера на рис.4 является ошибочным, линия из 12 отрезков (брюшко-квадрат и 8 лапок) не является самым коротким соединением для 8 вершин куба. Я получила новый результат. Я рассуждала так. Маленький квадрат в середине из 4 отрезков можно сделать короче, потому что жучок Штейнера из 5 отрезков намного короче соединяет четыре вершины квадрата, чем четыре его стороны. Заменила квадрат в середине на жучок Штейнера. Я выношу на защиту новую форму, то есть новую топологию. Главное достижение – маленький квадрат в середине из 4 отрезков можно заменить жучком из 5 отрезков. Жучок короче квадрата, поэтому длина всей линии станет меньше. Я спаяла проволочную модель нового решения задачи Штейнера о соединении 8 вершин куба самой короткой линией, но математически её пока не изучала ни я, ни студенты. Эта модель состоит из 13 отрезков и показана на рис. 7.

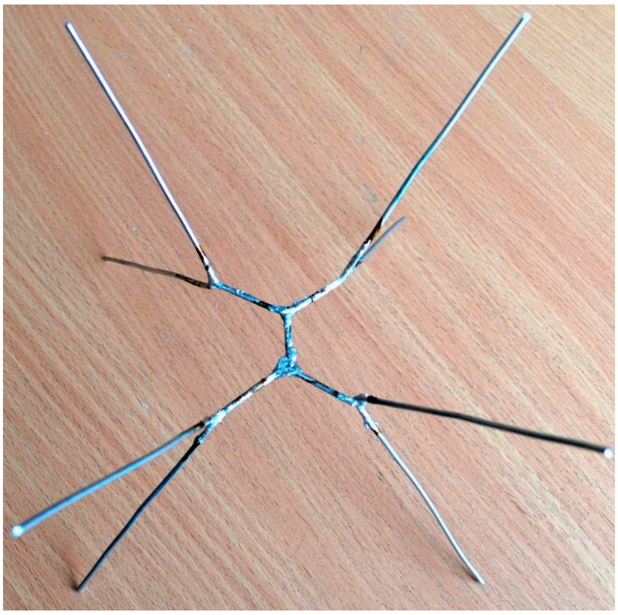


Рис. 7. Новое решение-топология задачи Штейнера для куба

Из каждой вершины куба проводится отрезок к маленькому квадрату в середине, который приблизительно в 3 раза меньше грани куба. Получается 8 отрезков – лапок большого жучка. Стороны маленького квадрата в середине убираются и заменяются более короткой линией – маленьким жучком из пяти отрезков. Всего получается 13 отрезков.

Такие ячейки являются самыми лёгкими и могут соединяться в новом композиционном материале. Это показано на рис.8. Физические свойства соединённых ячеек Штейнера – это моя следующая работа, но уже по физике. Две кубические ячейки Штейнера можно соединить тремя способами: отрезки-брюшки жучка параллельны, поперёк и поперёк по-другому. Прочность соединения получается разной. Это называется анизотропией прочности.

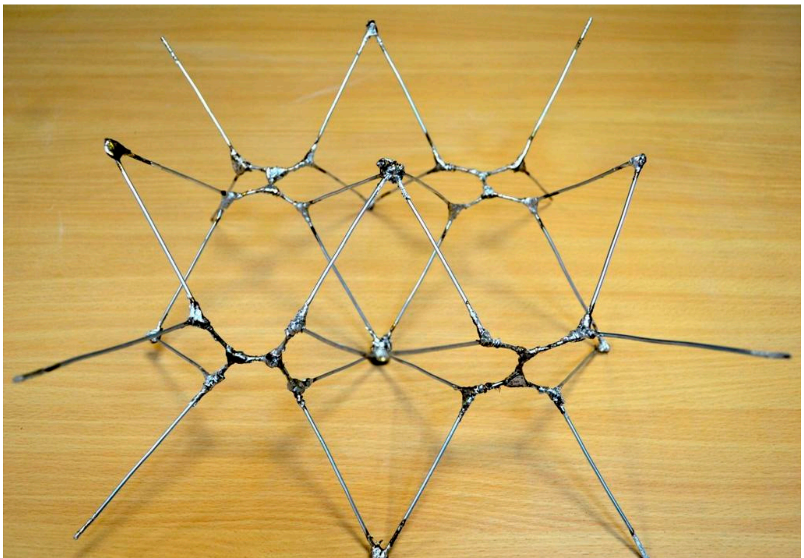


Рис. 8. Три варианта соединения пары ячеек

Постепенно с уточнением математического решения создаётся более точная модель композиционного материала.

Заключение

1. Предложен физический способ решения задачи Штейнера о соединении четырёх вершин квадрата самой короткой линией.

2. Предложено обобщение задачи Штейнера для куба.

3. Доказана новая форма-топология решения задачи Штейнера о соединении восьми вершин куба самой короткой линией из 13 отрезков, а не из 12, как считалось раньше.

4. Постепенно создаётся модель нового лёгкого и прочного композиционного материала.

5. Я хочу продолжать работу в двух направлениях: в математическом – изучить размеры всех 13 отрезков новой формы-топологии, в физическом – изучить прочность спаянных различными способами ячеек Штейнера как для квадрата, так и для куба.

В октябре и ноябре 2018 года результаты работы были доложены:

1) в Санкт-Петербургском Политехническом университете Петра Великого на 12–м Всероссийском форуме студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и инновации в технических университетах 2018» 22–27 октября 2018 года, есть сертификат участника, сборник и публикация [8];

2) в Казанском (Приволжском) федеральном университете на 3-й Международной школе-конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Материалы и технологии 21 века» 28 октября – 1 ноября 2018 года, есть сертификат участника, сборник и публикация [9];

3) в городе Жуковском Московской области на 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ (ФИЗТЕХ) с международным участием 19–26 ноября 2018 года, есть сертификат участника, приз, сборник и публикация [10];

4) в Президиуме Российской академии наук в Совете молодых учёных РАН на 4–м Междисциплинарном научном форуме с международным участием «Новые материалы и перспективные технологии 2018» 27–30 ноября 2018 года, есть сертификат участника, ожидается сборник и публикация;

5) на 2-й Научно-практической конференции школьников «Школьная идея 2018» (ШКИД-2018) в Президиуме Российской академии наук 30 ноября 2018 года, есть диплом участника;

6) на «2-х Научно-инновационных сражениях» в Совете молодых учёных и специалистов города Королёва Московской области «Нет задач невыполнимых 2018» 24 ноября 2018 года, есть диплом участника, диплом победителя за 3–е место, кубок победителя за 3–е место и денежный приз 10.000 рублей [11].

Список литературы

1. Драцкая А.И., Скворцова А.А. Структуры на основе минимальных поверхностей // II Международная школа конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Биомедицина, материалы и технологии XXI века», 20–23 сентября 2016. – Казанский (Приволжский) федеральный университет. – Казань: Изд. К(П)ФУ, 2016. – С.228. – Эл. ресурс: http://media.wix.com/ugd/14a693_b2c3ef2616904b0e83da5ff924c337a3.pdf.

2. Драцкая А.И., Скворцова А.А. Минимальные кубические структуры из стержней и плёнок // X Всероссийский форум студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и инновации в технических университетах». – Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого, 24–29 октября 2026. – Секция «Новые материалы и технологии». – С. 47–48. – Электронный ресурс: http://ysc.spbstu.ru/forum2016/Forum2016.pdf.

3. Драцкая А.И., Скворцова А.А. Минимальные кубические ячейки из стержней и плёнок для композиционного материала // 59-я Всероссийская научная конференция с международным участием. – МФТИ-ФАЛТ, г. Жуковский, Московская область. – 21–26 ноября 2016. – Секция «Прочность летательных аппаратов» [Электронный ресурс]. – http://conf59.mipt.ru/static/reports_pdf/1505.pdf.

4. Якимова Е.И., Драцкая А.И. Лёгкая арматурная сетка с квадратными ячейками // Программа 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. – Москва – Долгопрудный-Жуковский. – М.: МФТИ, 2017. -116 с. – ISBN 978–5–7417–0651–0. – Секция прочности летательных аппаратов. – С.60–61. [Электронный ресурс]: https://conf60.mipt.ru/public/admin/mipt-conference/Programma.pdf.

5. Якимова Е.И., Драцкая А.И., Скворцова А.А. Оптимизация арматурного перекрытия в строительных конструкциях // Наука будущего – наука молодых: Сборник тезисов участников форума. – Нижний Новгород: ООО «Инконсалт-К», 2017. – 620 с. – С.185–187. – http://sfy-conf.ru/.

6. Якимова Е.И., Драцкая А.И. Новые экономичные армосетки для обхода деталей // 21–я Научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов. 30 октября – 3 ноября 2017 г.: Тезисы докладов / Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва, – Том 2. – С.69–70. – https://conf.energia.ru/images/tezis-2.pdf.

7. Якимова Е.И., Драцкая А.И. Модель композиционного материала с лёгкими кубическими силовыми ячейками / Третий междисциплинарный молодёжный научный форум с международным участием «Новые материалы 2017»: Сборник материалов. – М.: ООО «Буки Веди», 2017. – 903 с. – С. 560–563. – ISBN 978–5–4465–1638–4. – http://n-materials.ru/wp-content/uploads/2017/11/Sbornik.pdf.

8. Драцкая А.И. Задача Штейнера для нового композиционного материала // Наука и инновации в технических университетах: Материалы Двенадцатого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых учёных, 24–26 октября 2018 г. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2018. – 181 с. – ББК 30.1 Н 34 – Секция «Новые материалы и технологии». – С. 49–51.

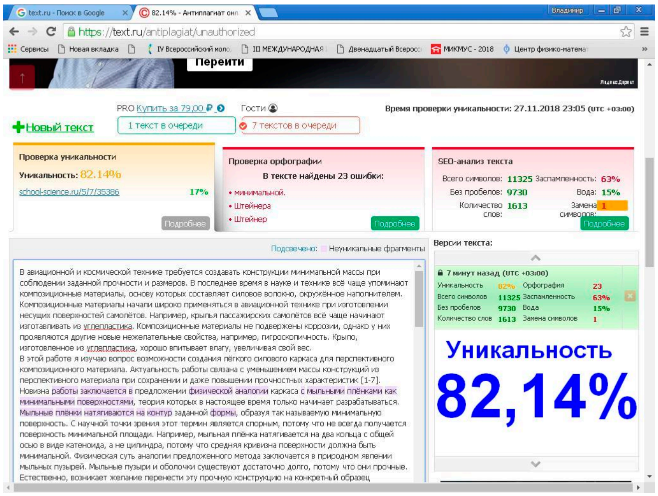
9. Драцкая А.И., Скворцова А.А., Якимова Е.И. Новая геометрия минимальной арматурной кубической ячейки для композиционного материала // 3–я Международная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Материалы и технологии 21 века». Казанский (Приволжский) федеральный университет, 28 октября – 1 ноября 2018 г.: Сборник тезисов. – Казань, 2018. – 326 с. – С. 234.

10. Драцкая А.И., Скворцова А.А. Новое решение задачи Штейнера для композиционного материала о соединении восьми вершин куба самой короткой линией / П78 Программа 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 19–25 ноября 2018 года. Секция прочности летательных аппаратов. – М.: МФТИ, 2018. – 116 с. – С. 59.

11. Драцкая А.И. Задача Штейнера для нового композиционного материала. – Электронный ресурс на сайте руководителя школьного кружка. – http://cfmo.ucoz.ru/load/2_e_nauchnye_srazhenija_innovacionnykh_proektov_sovet_molodykh_uchjonykh_i_specialistov_goroda_koroljova_moskovskoj_oblasti_24_nojabrja_2018_g/1–1–0–458.

Приложение

Проверка текста на уникальность в системе «Антиплагиат» text.ru



Проверку текста на уникальность в системе «Антиплагиат» text.ru выполнил 27.11.2018 г. руководитель школьного кружка «Юный физик – умелые руки» МБОУ «Гимназия №5» городского округа Королёв (мкр. Юбилейный) Московской области доктор технических наук Лебедев Владимир Валентинович, уникальность 82,14%. Снижение уникальности на 18% за счёт ссылки на собственный первоисточник-публикацию школьницы на предыдущем конкурсе «V Старт в науке» не значительно. Ученица 5-го класса Драцкая А.И. допущена к участию в конкурсе «VI Старт в науке».