СОФИЗМ

Семёнова М.У.

МКОУ «СОШ а. Верхний Учкулан», 7 класс

Руководитель: Джамбаева Ф.Н., МКОУ «СОШ а. Верхний Учкулан», учитель математики

1. Основные понятия алгебраический геометрический арифметический софизм

Наверняка каждый человек хоть раз в жизни слышал подобную фразу: «Дважды два равно пяти» На самом деле, таких примеров можно привести много, но что все они обозначают? Кто их выдумал? Имеют ли они какое-нибудь логическое объяснение или же это лишь шутка?

Именно эти вопросы мы хотим рассмотреть в нашей работе Математические софизмы

Математический софизм – удивительное утверждение, в доказательстве которого кроются незаметные, а подчас и довольно тонкие ошибки. Софизм – это то же надувательство, только выполненное намного изящнее и незаметнее, за что мы его и любим. Каков бы ни был софизм, он обязательно содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Особенно часто в софизмах выполняют «запрещенные» действия или не учитываются условия применимости теорем, формул и правил.

Софизмы имеют четкое логическое объяснение. Кроме того, с математическими софизмами мы встречаемся намного чаще, чем с обычными.

Поиск заключенных в софизме ошибок, ясное понимание их причин ведут к осмысленному постижению математики и, кроме того, показывает, что математика – это живая наука. Надеемся, что наш проект будет интересен и принесёт пользу ребятам.

Актуальность выбранной темы заключается в том, что:

1) Наше общество развивается большими темпами.

2) Для развития производства требуются техники, инженеры, ученые, знания которых базируются на точных науках: математике, физике, химии.

3) И эти науки надо не только знать, но и понимать.

Мы считаем, что софизмы развивают логику мышления, помогают лучше усвоить и разобраться в математике, прививают навыки правильного мышления.

Поэтому мы выбрали эту тему.

Основная гипотеза проекта

Если неточно знать формулировки теорем, математические формулы, правила и условия, при которых они выполняются, а также не анализировать построение чертежа к геометрической задаче, то можно получить абсурдные результаты, противоречащие общепринятым представлениям.

Цель нашей работы:

Познакомиться с софизмами, показать значимость математических софизмов при изучении математики, показать как получаются абсурдные выводы. Важно четко понимать допущенные ошибки, иначе софизмы будут бесполезны.

Задачи:

• дать определение понятиям «софизм» и «парадокс», узнать в чём их отличие;

• классифицировать различные виды софизмов;

• понять, как найти ошибку в софизмах;

Методы исследования:

• Анкетирование;

• Анализ и контроль полученных результатов, классификация софизмов;

• Демонстрация полученных результатов в презентации;

• Выступление на конференции.

Понятие софизма. Исторические сведения

Понятие софизма. Софизм – (от греческого sophisma – уловка, ухищрение, выдумка, головоломка).

Софизмом называется умышленно ложное умозаключение, которое имеет видимость правильного.

Каков бы ни был софизм, он обязательно содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Разбор софизмов, прежде всего, развивает логическое мышление.

Что же такое математический софизм? Математический софизм – удивительное утверждение, в доказательстве которого кроются незаметные, и довольно тонкие ошибки.

Понимание ошибок в софизме помогает развивать логику и навыки правильного мышления. Если нашел ошибку в софизме, значит, ты ее осознал, а осознание ошибки предупреждает от ее повторения в дальнейших математических рассуждениях. Софизмы не приносят пользы, если их не понимать.

Мы проанализировали софизмы и выделили типичные ошибки в софизмах. Это:

1) запрещенные действия,

2) неточное использование условий теорем, формул и правил,

3) ошибочный чертеж,

4) опора на ошибочные умозаключения.

Нередко, ошибки, которые допускают в софизме, настолько умело скрыты, что даже опытный математик не сразу их выявит. Именно в этом и проявляется связь математики и философии в софизмах.

Основные создатели софизмов – древнегреческие ученые-философы, но, тем не менее, они создавали математические софизмы, основываясь на элементарных аксиомах, что еще раз подтверждает связь математики и философии в софизмах.

Кроме того, очень важно правильно преподнести софизм, так, чтобы докладчику поверили, а значит, необходимо владеть даром красноречия и убеждения.

Работая над проектом, мы обнаружили интересную формулу успешности софиста!*

Успешность софизма определяется несколькими составляющими: $a + b + c + d + e + f$ и определяется величиной этой суммы, где $(a + c + e)$ составляет показатель силы диалектика, $(b + d + f)$ есть показатель слабости его жертвы.

– a – отрицательные качества лица (нет развития способности управлять вниманием).

– b – положительные качества лица (способность активно мыслить)

– c – аффективный элемент в душе искусного диалектика

– d – качества, которые пробуждаются в душе жертвы софиста и омрачают в ней ясность мышления

– e – категоричность тона, не допускающего возражения, определённая мимика

– f – пассивность слушателя.

2. Экскурс в историю

Софистами называли группу древнегреческих философов 4–5 века до н.э., достигших большого искусства в логике. В период падения нравов древнегреческого общества(5 век) появляются так называемые учителя красноречия, которые целью своей деятельности считали и называли приобретение и распространение мудрости, вследствие чего они именовали себя софистами. Наиболее известна деятельность старших софистов, к которым относят Протагора из Абдеры, Горгия из Леонтип, Гиппия из Элиды и Продика из Кеоса. Но суть деятельности софистов много больше, чем простое обучение искусству красноречия.

Они обучали и просвещали древнегреческий народ, старались способствовать достижению нравственности, присутствия духа, способности ума ориентироваться во всяком деле. Но софисты не были учеными. Умение, которое должно было быть достигнуто с их помощью, заключалось в том, что человек учился иметь в виду многообразные точки зрения.

Исторически сложилось, что с понятием софизма связывают идею о намеренной фальсификации, руководствуясь признанием Протагора, что задача софиста- представить наихудший аргумент как наилучший путем хитроумных уловок в речи, в рассуждении, заботясь не об истине, а об успехе в споре или о практической выгоде. В Греции софистами называли и простых ораторов.

Известнейший ученый и философ Сократ поначалу был софистом, активно участвовал в спорах и обсуждениях софистов, но вскоре стал критиковать их учение. Такому же примеру последовали и его ученики (Ксенофонт и Платон).

Философия Сократа была основана на том, что мудрость приобретается с общением, в процессе беседы. Учение Сократа было устным, его и по сей день считают самым мудрым философом.

Что касается самих софизмов, то, пожалуй, самым популярным на тот момент в Древней Греции был софизм Евбулида : «Что ты не терял, ты имеешь. Рога ты не терял. Значит у тебя рога». Единственная неточность, которую возможно было допустить, то это – двусмысленность высказывания. Данная постановка фразы является нелогичной, но логика возникла намного позже, благодаря Аристотелю, поэтому, если бы фраза строилась так: «Все, что ты не терял», то вывод стал бы логически безупречным.

3. Математические софизмы

Разбор и решение нестандартных математических задач помогает развивать смекалку и логику. Математические софизмы относятся именно к таким задачам.

Однако следует помнить, что в математике важна аккуратность. Каждый шаг от одной логической конструкции к другой должен быть точным, тщательно выверенным. Один неверный переход может привести не просто к неточности, а к большой ошибке.

Мы предлагаем Вам вместе с нами попытаться разобраться с этим.

В нашей работе мы рассмотрим три типа математических софизмов: алгебраические, геометрические и арифметические.

Алгебраические софизмы

Алгебра – один из больших разделов математики, принадлежащий наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки. Задачи, а также методы, отличающие её от других отраслей математики, создавались постепенно, начиная с древности. Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметических задач. Приёмы эти заключаются обычно в составлении и решении уравнений. Т.е. алгебраические софизмы – намеренно скрытые ошибки в уравнениях и числовых выражениях.

1) «Один рубль не равен ста копейкам»

Известно, что любые два неравенства можно перемножать почленно, не нарушая при этом равенства, т.е.

Если $a=b$,

$$c=d, \text{ то } ac=bd.$$

Применим это положение к двум очевидным равенствам

$$1 \text{ р.}=100 \text{ коп}, \quad (1)$$

$$10 \text{ р.}=10\cdot 100 \text{ коп.} \quad (2)$$

перемножая эти равенства почленно, получим

$$10 \text{ р.}=100000 \text{ коп.} \quad (3)$$

и, наконец, разделив последнее равенство на 10 получим, что

$$1 \text{ р.}=10\,000 \text{ коп.}$$

таким образом, один рубль не равен ста копейкам. Где ошибка?

Ошибка, допущенная в этом софизме, состоит в нарушении правил действия с именованными величинами: все действия, совершаемые над величинами, необходимо совершать также и над их размерностями.

Действительно, перемножая равенства (1) и (2), мы получим не (3), а следующее равенство

$$10 \text{ р.} =100\,000 \text{ коп.},$$

которое после деления на 10 дает

$$1 \text{ р.} = 10\,000 \text{ коп.},$$

а не равенство 1р=10 000 к, как это записано в условии софизма.

Извлекая квадратный корень из равенства1 р. = 10 000 коп. получаем верное равенство 1р.=100 коп.

2) «Если a больше b, то a всегда больше, чем $2b$».

Возьмем два произвольных положительных числа a и b, такие, что $a > b$. Умножив это неравенство на b, получим новое неравенство $ab > b\cdot b$, а отняв от обеих его частей а·а, получим неравенство $ab–a\cdot a > b\cdot b – a\cdot a$, которое равносильно следующему:

$$a(b–a) > (b+a)(b–a). \quad (1)$$

После деления обеих частей неравенства (1) на b-a получим, что

$$a > b+a. \quad (2)$$

А прибавив к этому неравенству почленно исходное неравенство $a> b$, имеем $2a >2b+a$, откуда $a > 2b$. Итак, если $a > b$, то $a > 2b$.

Где ошибка?

Ошибка совершена при переходе от равенства (1) к (2). Т.к. $a > b$, то $b – a<0$, следовательно, при делении неравенства (1) на $b – a$, мы должны поменять знак неравенства на противоположный.

Геометрические софизмы

Геометрические софизмы – это умозаключения или рассуждения, обосновывающие какую-нибудь заведомую нелепость, абсурд или парадоксальное утверждение, связанное с геометрическими фигурами и действиями над ними.

1) «Через точку на прямую можно опустить два перпендикуляра».

Попытаемся «доказать», что через точку, лежащую вне прямой, к этой прямой можно провести два перпендикуляра. С этой целью возьмем треугольник ABC.

На сторонах AB и BC этого треугольника, как на диаметрах, построим полуокружности. Пусть эти полуокружности пересекаются со стороной AC в точках E и D. Соединим точки E и D прямыми с точкой B.

Угол AEB прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр; угол BDC также прямой. Следовательно, BE перпендикулярна AC и BD перпендикулярна AC.

Через точку B проходят два перпендикуляра к прямой AC.

Где ошибка?

Рассуждения, о том, что из точки на прямой можно опустить два перпендикуляра, опирались на ошибочный чертеж. В действительности полуокружности пересекаются со стороной АС в одной точке, т.е. BE совпадает с BD. Значит из одной точки на прямой нельзя опустить два перпендикуляра.

Арифметические софизмы

Арифметика – (греч. arithmetika, от arithmys – число), наука о числах, в первую очередь о натуральных (целых положительных) числах и (рациональных) дробях, и действиях над ними. Так что же такое арифметические софизмы?

Арифметические софизмы – это числовые выражения, имеющие неточность или ошибку, не заметную с первого взгляда.

1) «Дважды два – пять!»

Возьмем в качестве исходного соотношения следующее очевидное равенство: 4:4= 5:5.

После вынесения за скобки общего множителя из каждой части равенства будем иметь:

$$4\cdot(1:1)=5\cdot(1:1)$$

или

$$(2\cdot2)(1:1)=5(1:1)$$

Наконец, зная, что 1:1=1, мы из предыдущего получаем:

$$2\cdot2=5$$

Где ошибка?

Нельзя выносить множитель за скобки так, как было сделано. 4·(1:1)=5·(1:1)

Можно так^ 4 (1:4) и 5 (1:5).

4. Логические софизмы

Кроме математических софизмов, существует множество других. Понять абсурдность таких утверждений проще, но от этого они не становятся менее интересными.

Очень многие софизмы выглядят как лишенная смысла и цели игра с языком; игра, опирающаяся на многозначность языковых выражений, их неполноту, недосказанность, зависимость их значений от контекста и т.д. Эти софизмы кажутся особенно наивными и несерьезными.

Полупустое и полуполное

«Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит, равны и целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное».

Не знаешь то, что знаешь

«Знаешь ли ты, о чём я хочу тебя спросить?» – «Нет». – «Знаешь ли ты, что добродетель есть добро?» – «Знаю». – «Об этом я и хотел тебя спросить. А ты, выходит, не знаешь то, что знаешь».

Лекарства

«Лекарство, принимаемое больным, есть добро. Чем больше делать добра, тем лучше. Значит, лекарств нужно принимать как можно больше».

5. Многообразие парадоксов и их причины

Парадоксы – это неожиданные утверждения, противоречащие здравому смыслу или общепризнанным научным теориям. Очень часто их рассматривают как ошибки, хотя в большинстве случаев они таковыми не являются. Обычно парадоксы построены на логически верных заключениях, но их противоречивый результат не является преднамеренным (этим они отличаются от софизмов). Парадоксы известны науке уже более двух тысяч лет. В античные времена были описаны многие парадоксы и для некоторых из них ученые до сих пор не могут найти объяснения и решения. Открываются парадоксы и в наши дни. Обычно подобные открытия сопровождаются кризисами в науке, разрушением старых, проверенных временем теорий и попытками создать новые, которые способны объяснить появившиеся противоречия. Парадоксы присутствуют везде – и в повседневной жизни, и в науке. Практически в каждой научной области исследования существуют свои парадоксы.

Парадоксы обнажают глубинные течения познавательного процесса. Возвещая о назревшем неблагополучии в науке, они вместе с этим решительно продвигают ее вперед и именно тем, что приносят новые, еще более парадоксальные идеи.

Парадоксы математические

Существуют парадоксы в математике. И вот, действительно, самое парадоксальное – это то, что в математике вообще есть парадоксы.

1. Парадокс Банаха – Тарского, или парадокс удвоения шара, говорит, что трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям. Разделяя шар на конечное число частей, мы интуитивно ожидаем, что, складывая эти части вместе, можно получить только сплошные фигуры, объём которых равен объёму исходного шара.

Однако это справедливо только в случае, когда шар делится на части, имеющие объём. Суть парадокса заключается в том, что в трёхмерном пространстве существуют неизмеримые множества, которые не имеют объёма. Очевидно, что «куски» в таком разбиении не могут быть измеримыми (и невозможно осуществить такое разбиение какими-либо средствами на практике)

2. Задача о треугольнике.

Дан прямоугольный треугольник 13Ч5 клеток, составленный из 4 частей. После перестановки частей при визуальном сохранении изначальных пропорций появляется дополнительная, не занятая ни одной частью, клетка.

Разгадка простая: первый треугольник немного «вогнут», а второй – слегка выпуклый.

В этом можно убедиться, сравнив наклон гипотенузы синего и жёлтого кусочков: у жёлтого наклон = 0.375, а у синего – 0.4. Получается, что общие площади верхнего и нижнего треугольников всё-таки различаются, а разница как раз составляет одну клетку!

6. Парадокс бесконечно малых величин

Математический кризис в этой области существовал в период XVII – XVIII веков.

Бесконечно малые – это переменные величины, стремящиеся к нулю, или, если быть точнее, к пределу, равному нулю. Проблема состояла в их туманном понимании: то они рассматриваются как числа равные нулю, то как ему неравные. Причем, при таком подходе, люди рассматривали их как постоянные величины. Тогда из этого названия таких величин следует, что бесконечное является чем-то завершенным.

Кризис перестал быть таковым после создания теории пределов в начале XIX века французским математиком Огюстеном Луи Коши (1789 – 1857). С того момента бесконечно малые величины рассматриваются как постоянно изменяющиеся, а не постоянные, стремящиеся к пределу, но никогда его не достигающие. Постоянно изменяющиеся числа!

Ситуация, когда доказать более сильное утверждение легче, чем более слабое, и называется парадоксом изобретателя. Он был известен еще и древним мыслителям, но придумал это название в начале XX века венгерский математик Д. Пойа, сказав о парадоксе следующие слова: «Легче доказать более сильную теорему, чем более слабую». Этот парадокс существует не только в математике, но и в других областях, в том числе и в жизненных ситуациях. Такое же название (и по праву) получили ситуации, когда решить более общую задачу легче, чем более узкую. Прием, позволяющий это сделать, заключается в том, чтобы свести задачу к более общей, относительно которой исходная задача будет являться лишь частным случаем. Приведу один пример:

В III веке до н. э. тиран города Сиракузы Гиерон поручил своему подданному и близкому родственнику Архимеду определить, не подмешано ли к его золотой короне, изготовленной ювелирами, менее благородное серебро. Эту частную задачу Архимед смог решить лишь как общую (т.к. о химическом анализе тогда еще и не помышляли; к тому же корону разрушать было нельзя), выявив закон «подъемной силы», то есть силы Архимеда, действующей на погруженное в жидкость тело.

Таким же образом появились на свет в математике интегральное (выросшее из изобретенного древнегреческим математиком Евдоксом Книдским (около 408 – около 355 до н. э.) метода «исчерпывания») и дифференциальное (когда Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646 – 1716) долго бился на задачей проведения касательной к кривой в заданной точке, сведя ее к проведению секущей через две бесконечно близкие точки) исчисления, в науке изобретена пастеризация и многое-многое другое.

Заключение

О математических софизмах и парадоксах можно говорить бесконечно много, как и о математике в целом. Изо дня в день рождаются новые софизмы и парадоксы, некоторые из них останутся в истории, а некоторые просуществуют один день.

Математические софизмы – это лишь часть одного большого течения. Поиск заключенных в софизме ошибок, ясное понимание их причин ведет к осмысленному изучению математики. Обнаружение и анализ ошибки, заключенной в софизме, очень часто оказывается более поучительным, чем просто разбор решений «безошибочных» задач. Эффектная демонстрация «доказательства» явно неверного результата, демонстрация того, к какой нелепице приводит пренебрежение каким-либо математическим правилом, и последующий поиск и разбор ошибки, позволяют понять и «закрепить» математическое правило или утверждение.

Некоторые софизмы приходилось разбирать по нескольку раз, чтобы действительно в них разобраться, некоторые же наоборот, казались очень простыми. Исторические сведения о софистике и софистах помогли нам разобраться, откуда же все-таки началась история софизмов.

Исследовать софизмы действительно очень интересно и необычно. Порой сам попадаешься на уловки софиста, на столь безукоризненность его рассуждений. Перед тобой открывается какой-то особый мир рассуждений, которые поистине кажутся верными. Благодаря софизмам и парадоксам можно научится искать ошибки в рассуждениях других, научится грамотно строить свои рассуждения и логические объяснения.

Прослеживая историю математики, можно сказать, что во все времена математику спасала какая-нибудь новая идея. Она придавала математике строгость, восстанавливая ее авторитет. Поэтому не стоит бояться парадоксов, ибо они являются двигателями науки. Благодаря софизмам и парадоксам можно научиться искать ошибки в рассуждениях других, научится грамотно строить свои рассуждения и логические объяснения.

Помимо основных целей, поставленных в начале работы, мы преследовали еще одну: прикосновение к тому, с чем сталкивались наши далекие предки, к теме, которая имеет исторические корни. Нами были рассмотрены примеры наиболее известных софизмов и парадоксов.

В процессе работы над проектом мы столкнулись с софизмами, в которых не смогли разобраться из-за недостаточного багажа знаний по математике. Мы будем пополнять знания на уроках математики, и вернемся к этим вопросам. Поэтому тема нашей работы далеко не исчерпана. Мы рассмотрели лишь некоторые, самые известные примеры софизмов. На самом деле их намного больше. Мы продолжим изучение этой темы в будущем.

А закончить я бы хотела словами А.Д. Александрова «Математика учит точности мысли, подчинению логике доказательства, понятию строго обоснованной истины, а всё это формирует личность, пожалуй, больше, чем музыка».

Список литературы

1. Мадера А.Г., Мадера Д.А. Математические софизмы. – М.: Просвещение, 2003.

2. Брадис В.М., Минковский В.Л., Харчева Л.К. Ошибки в математических рассуждениях.

3. Перельман Я.И. Занимательная математика.

4. Новосёлов М.М. Абстракция множества парадокс Рассела // Вопросы философии. – 2003. – №7.

5. Аменицкий Н. «атематические развлечения и любопытные приёмы мышления. – М., 1912.

6. Горячев Д.Н., Воронец А.Н. Задачи, вопросы и софизмы для любителей математике. – М., 1966.

7. Лямин А.А. Математические парадоксы и интересные задачи. – М., 1911; 2010.