

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СКАЗКИ – ФРАКТАЛЫ

Малышкина Е.А.

г. Кыштым, МОУ «СОШ № 13», 7 класс

Руководитель: Дубынина Т.В., г. Кыштым, МОУ «СОШ № 13», учитель математики

Данная статья является реферативным изложением основной работы. Полный текст научной работы, приложения, иллюстрации и иные дополнительные материалы доступны на сайте VI Международного конкурса научно-исследовательских и творческих работ учащихся «Старт в науке» по ссылке: <https://school-science.ru/6/7/37568>.

Наблюдая окружающий мир, восхищаясь его многообразием, мы замечаем порой удивительные закономерности. Стремясь понять суть гармонии, мы задаём себе вопросы. Как устроен мир? Что общего между расположением семян подсолнечника, элегантной спиралью раковины улитки и формой далёких галактик, строением лучей снежинки, листа папоротника или ветки ели? Что общего у дерева, молнии или кровеносных сосудов нашего организма? Разговаривая на уроке математики о геометрических фигурах, формах и их аналогах в природе, учитель отметил, что существует одно свойство структуры, присущее всем перечисленным объектам: они состоят из подобных частей.

Мы внимательно рассмотрели ветку дерева и ствол. От ветки, как и от ствола дерева, отходят отростки поменьше, от них – ещё меньшие, и т. д., то есть ветка подобна всему дереву. Рассматривая медицинский атлас, я заметила, что похожим образом устроена и кровеносная система. Но настоящим открытием стал морозный узор на окне. При внимательном рассмотрении, я увидела множество треугольников, отрезков, дуг. Повторяясь и сочетаясь, они образовывали удивительно красивый узор – настоящую геометрическую сказку.

В библиотечке кабинета математики мне попала книга «Золотое сечение. Математический язык красоты». Но в моём представлении, математика – язык чисел, фигур и схем. Можно ли выразить красоту с помощью чисел и фигур? Существует ли в мире закон построения прекрасного? Измеряется ли гармония с помощью циркуля и линейки? Математика дает на все эти вопросы утвердительный ответ [2]. Изучение этой книги, определило цель нашего исследования, из неё я узнала о фракталах. Компьютерный комплекс «Живая Математика», который используется старшеклассниками нашей школы во внеурочной деятельности

по математике, позволит мне построить снежинку Коха – один из примеров фракталов.

Цель работы: попытаться найти в математике аналоги объектов реального мира (в виде форм), построить фрактал снежинка Коха в программном комплексе «Живая Математика», познакомиться с алгебраическими фракталами.

Для достижения цели мы должны решить следующие задачи исследования.

Задачи: 1. Найти в окружающем мире соответствия геометрическим формам.

2. Выяснить что такое фрактал.

3. Познакомиться с историей возникновения и видами фракталов.

4. Попытаться создать свои вариации геометрических фракталов.

5. Применить фракталы в одном из своих увлечений (в мультипликации).

6. Познакомиться с программным комплексом «Живая математика».

7. Построить фрактал в программе «Живая математика».

9. Провести сравнительный анализ фигур, построенных в программах «Живая математика» и Photoshop.

10. Начать знакомство с алгебраическими фракталами.

Гипотеза: доказать, что использование свойства самоподобия, поможет создать иллюзию вырастания объекта в мультипликации. Доказать, что рассматривая данную тему, мы сможем расширить знания не только в математике, но и в информатике, познакомиться с новыми принципами построения кривой Коха и ковра Серпинского.

1. Основное содержание

К сожалению, многие люди считают, что математика – наука, в которой нет ничего привлекательного. Одни сухие цифры, формулы, схемы, чертежи. Мы с этим не согласны и попытаемся привести доказательства, того что это не так.

Герман Вейль, немецкий математик и физик, говорил: «Симметрия..., есть идея, с помощью которой человек веками пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство»[2], а с высказыванием немецкого математика Феликса Хаусдорфа: «Есть в математике нечто, вызывающее человеческий восторг»[1] я не могу не согласиться. И в доказательство, хочу познакомить Вас

с объектами математики, открывшими для меня настоящую геометрическую сказку, в которой вырастают волшебные деревья, мерцают удивительные звёзды, живут сказочные драконы и даже водятся математические монстры. Но всех их объединяет одно название, а называются они фракталами.

Если внимательно посмотреть вокруг, можно заметить, что лист папоротника состоит из частей похожих как две капли на него самого, каждая часть кочана капусты брокколи – похожа на весь кочан в целом, ветка дерева напоминает само дерево. Оказывается, такое свойство называют самоподобием [3]. Самоподобие окружает нас повсюду: и в живой и в неживой природе, главное заметить его.

Например, в живой природе таким свойством обладает наша кровеносная система и легкие. Это свойство можно найти в морских звездах, морских раковинах, в растениях. Если рассматривать неживую природу, то в ней интересных примеров гораздо больше. Молнии, снежинки, облака, узоры на окнах в морозные дни – все это самоподобные объекты. Такие объекты называют фракталами.

Слово фрактал образовано от латинского слова *fractus*, что в переводе означает состоящий из фрагментов, т.е. фрактал – геометрическая фигура, составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре в целом. Это и есть самоподобие. Свойство самоподобия отражает главную особенность природных объектов, когда отдельная клетка растения или животного несет в себе полную информацию обо всем организме [3].

1.1 История возникновения фракталов

Ещё в 19 веке Георг Кантор (1845–1918) – немецкий математик и логик, с помощью простой повторяющейся процедуры превратил линию в набор несвязанных точек. Он брал линию, делил на три равные части и удалял центральную треть, после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками. Полученный объект назвали Пылью Кантора (Рис. П1.1). Другой математик проживающий в Италии – Джузеппе Пеано (1858–1932) изобразил особую линию. Он брал прямую и заменял ее на 9 отрезков длиной в 3 раза меньшей, чем длина исходной линии. Далее он делал то же самое с каждым отрезком. И так много-много раз. Уникальность полученной таким образом линии состояла в том, что она заполняет всю плоскость (Рис. П1.2) [4].

Кривая Пеано и пыль Кантора выходили за рамки обычных геометрических объектов. Пыль Кантора строилась вроде бы

на основании прямой линии, но состояла из точек. Кривая Пеано строилась также на основании линии, а в результате получалась плоскость [1]. Вплоть до 20 века шло накопление данных о таких странных объектах, без какой-либо попытки их систематизировать. Их называли математическими монстрами. Так было, пока за них не взялся Бенуа Мандельброт, который по праву считается укротителем математических монстров и отцом фракталов. Он работал в известной фирме IBM математическим аналитиком. Постепенно сопоставив факты, Мандельброт пришел к открытию нового направления в математике – фрактальной геометрии. В 1977 году вышла в свет его книга «Фрактальная геометрия природы», в которой были использованы результаты ученых, работавших в период 1875–1925 годов. В своей книге Мандельброт дал определение фракталу, фрактальной геометрии и сформулировал основное свойство фракталов – самоподобие.

1.2 Какие бывают фракталы

В основном выделяют четыре вида фракталов: природные, геометрические, алгебраические и стохастические. Мы в своём исследовании более подробно остановились на природных и геометрических фракталах, потому что изучение остальных требует более глубокого знания математики. Примеры природных фракталов представлены на рисунках приложения 1 (Рис.П1.2.1).

Остановимся более подробно на геометрических фракталах. Фракталы этого класса самые наглядные, потому что в них явно просматривается самоподобность. На плоскости такие фракталы можно получать, задавая некоторую ломаную, называемую генератором. В результате бесконечного повторения аналогичных изломов получается фрактальная кривая.

1.2.1 Снежинка Коха

Наиболее известным геометрическим фракталом является Снежинка Коха. Строится она на основе равностороннего треугольника, треугольник с равными сторонами называется правильным. На первом шаге, стороны треугольника разбиваются на три равные части и средний отрезок заменяется правильным треугольником, такой треугольник считается подобным исходному (Рис.П1.2.2).

В результате получается звездчатый шестиугольник с равными сторонами, который тоже считается правильным, его часто называют «звезда Давида». Стороны этого шестиугольника вновь разбиваются на три равные части, а потом на каждом среднем

отрезке стороны строятся треугольники. Если много раз повторить такой процесс, то получим фрактал – снежинку Коха. Повторяющееся много раз действие учёные называют итерацией. Но самое интересное то, что периметр полученной ломаной линии невозможно вычислить. Изображение снежинки Коха приведено в приложении (Рис. П1.2.3).

1.2.2 Древо Пифагора

Другой замечательный фрактал – древо Пифагора. Называется он так потому, что каждый фрагмент представляет собой иллюстрацию к известной теореме «пифагоровы штаны во все стороны равны», которую мы будем изучать только в восьмом классе. Три попарно соприкасающихся квадрата ограничивают прямоугольный треугольник (Рис. П1.2.3).

Если менять острые углы треугольника, то будут получаться разнообразные формы дерева. А при значении углов 60° все три квадрата окажутся равными, а дерево превратится в повторяющийся узор на плоскости. Можно заменять квадраты прямоугольниками, тогда дерево будет больше похоже на настоящее, а при некоторой художественной обработке получаются довольно реалистичные изображения (Рис. П1.2.4).

1.2.3 Дракон Хартера

Более сложным геометрическим фракталом является «кривая дракона». Для ее построения возьмем отрезок. Повернем его на 90° вокруг одного из концов и добавим полученный отрезок к исходному. Получим уголок из двух отрезков. Повторим описанную процедуру. Повернем уголок на 90° вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной. Повторяя названные действия и уменьшая ломаные, будем получать все более сложные линии, напоминающие фигуру дракона (Рис. П1.2.5).

1.2.4 Ковер Серпинского

Одним из наиболее известных примеров алгебраических фракталов является треугольник Паскаля (Рис. П 1.2.9), состоящий из биномиальных коэффициентов [8]. Этот треугольник легко продолжить, заметив, что каждое число в нем является суммой двух, стоящих над ним (Рис. П 6.6.1). Если заменить эти числа их вычетами по модулю 2 (т.е. вместо каждого четного числа поставим 0, а вместо нечетного числа 1), то треугольник Паскаля примет следующий вид (Рис. П 6.6.2).

Можно заметить, что весь треугольник со стороной 8 содержит 3 одинаковых треугольника со стороной 4 (левый, правый

и верхний); каждый из них содержит 3 одинаковых треугольника со стороной 2, состоящих из трёх единиц. Все остальные места заняты нулями.

Попробуем вообразить, что получится, если мы продолжим этот треугольник до 2^N -го ряда, где N – большое число. После этого, сожмем треугольник до книжной страницы и заменим единицы черными точками, а нули – белыми. Получим следующую картину (Рис. П 6.6.3).

Довольно ясно становится, что если мы будем увеличивать N до бесконечности, наш треугольник будет стремиться к некоторому пределу. Этот предел – ковер Серпинского, открытый в 1916 году польским математиком Вацлавом Серпинским [8]. В нашем случае это треугольник Серпинского (Рис. П 6.6.3).

Типичный представитель класса стохастических фракталов «Плазма» (Рис. П 1.2.10). Именно он помогает моделировать горы и поверхности морей в большинстве компьютерных программ.

2. Применение фракталов

Фракталы находят все большее применение в науке. Основная причина этого заключается в том, что они очень точно описывают реальный мир. Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и т.д. Они приходят на помощь, когда требуется получить линии и поверхности очень сложной формы. Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных. При фрактальном сжатии, после увеличения картинка часто выглядит даже лучше, чем до него. Для передачи данных на расстояние используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес. Если рассматривать фракталы с точки зрения биологии, то это моделирование любых хаотических процессов, в частности при описании моделей популяций.

Фрактальные формы хорошо передают пористые материалы, которые имеют очень сложную геометрическую структуру. Эти знания используются в науке о нефти. Теория фракталов используется и при изучении структуры Вселенной [5].

Еще одной захватывающей, но спорной областью применения фракталов является компьютерное искусство. Фракталы не только служат ученым, но и помогают художникам передавать их мысли, чувства и настроения, воплощая самые невероятные фантазии. В наше время живописец

уже не может обойтись без компьютерной программы, которая строит причудливые картины-фракталы. Таких картин в Интернете немало. Предпринимаются попытки обоснования искусства с точки зрения фракталов. В повседневной жизни мы можем увидеть фракталы на рисунке обоев, на ткани, заставке рабочего стола компьютера, на открытках, тетрадях, то есть они используются дизайнерами разного направления.

Изучая фракталы, я решила попытаться построить свой уникальный фрактал. Но для начала я решила научиться строить фракталы при помощи компьютерных программ. Кроме того, за летние каникулы я вырастила подсолнух, который тоже относится к природным фракталам, встречающимся в живой природе, создала свой флорариум – с природными фракталами. Флорариум – это аквариум, в котором вместо рыб, разводят растения, в моём случае это будут суккуленты. А еще у меня в комнате растут два природных фрактала – это кактус и каланхоэ.

3. Практическая часть

3.1 Построение фракталов и применение их в мультипликации

«Снежинка Коха», «Древо Пифагора», «Дракон Хартера», напоминающий морозный узор натолкнули меня на мысль о создании мультфильма с их использованием.

Почему то сразу вспомнилось стихотворение С. Есенина «Береза». Попробуем взять его за основу и, используя компьютерные программы, создать мультфильм. Но для начала мне нужно нарисовать эти фракталы. Попробуем нарисовать их при помощи компьютерной программы Adobe Photoshop. Эту программу я выбрала потому, что в ней есть возможность включить вспомогательные элементы, такие, как сетка, что облегчит мне работу при рисовании.

За основу «Снежинки Коха» возьмем треугольник и, скопировав и повернув его на 180° , совместим их в одну фигуру. Тоже самое получилось бы, если мы каждую из сторон треугольника разделили на три части и заменили бы среднюю часть двумя отрезками такой же длины, расположенными под углом 60° . Далее выделяем верхний треугольник, полученной нами фигуры, и копируя, и поворачивая его на необходимый нам угол, вставляем такие треугольники в каждый из лучей предыдущей фигуры. Получилась Снежинка Коха (Приложение 2), которую я буду использовать в моём мультфильме. Разбивать на более мелкие части нашу снежинку я не буду, потому что в уменьшенном размере, снежинка «потеря-

ет» свою форму и будет похожа на «волнистый» круг.

Теперь попробуем нарисовать березу. Нарисуем её, используя принцип древа Пифагора. Из трех одинаковых прямоугольников нарисую фигуру, похожую на «рогатку», а дальше, равномерно уменьшая прямоугольники, будем пририсовывать по два прямоугольника к каждому предыдущему прямоугольнику, большего размера, образуя новую «рогатку». Выполним максимально возможное количество таких операций, чтобы наша береза была ветвистой (Приложение 3).

По стихотворению С. Есенина береза растет за окном, поэтому для основного фона мне нужно найти картинку с окном, на котором изобразим морозный узор. С морозным узором всё оказалось сложнее...

Рисовать в Paint оказалось совсем не просто, поэтому морозный узор мне пришлось рисовать сначала на графическом планшете (Приложение 4), а потом при помощи программы Adobe Photoshop разбили его на множество элементов, чтобы в мультфильме получился эффект постепенного появления рисунка. Создать свой собственный фрактал тоже оказалось не просто, хотелось изобразить его не только при помощи одного вида «завитка», а дать волю фантазии. Что из этого получилось, вы увидите в мультфильме. Звук я записала на телефон, а потом перенесла его на компьютер. В программу видео редактора я перенесла все файлы, которые буду использовать при создании мультфильма и, расположив их в нужном порядке, каждый на своей дорожке, я начала процесс «сбора» мультфильма. Выставляя длительность каждого файла, регулируя скорость звука, ориентируясь на сценарий, я записала мой мультфильм. Осталось только подобрать музыкальное сопровождение и записать начальные и конечные титры.

В прошлом году я впервые познакомилась с понятием фрактал, познакомилась с классификацией фракталов, попыталась создать свои вариации геометрических фракталов и создала мультфильм, используя созданные мной вариации фракталов «Снежинка Коха», «Древо Пифагора», «Морозный узор».

В этом году я занималась более глубоким изучением геометрических и начала изучать алгебраические фракталы, пыталась построить их в различных компьютерных программах.

3.2 Построение фракталов в компьютерной программе «Живая Математика»

С компьютерной программой «Живая математика» меня познакомил мой учитель

математики. Сначала я пыталась строить фракталы в программе NadinDesing. Это программа-генератор определённых фракталов, в которой можно было выбрать вид фрактала, его цветовую гамму и, задав количество итераций, сгенерировать фрактал. Также существуют и другие более сложные компьютерные программы, предназначенные для построения фракталов: Apophysis 2.0 и Apophysis 3D, Chaotica, UltraFractal и другие.

Но в нашей школе на дополнительных занятиях по математике старшеклассники пользуются программой «Живая математика». Эту программу мне и предложил освоить мой учитель математики.

Для построения снежинки Коха мне предстояло выполнить несколько этапов:

1. Научиться строить кривую Коха
2. Используя команду Итерации построить фрактал
3. Построить фигуру снежинки Коха

Прежде всего, мне предстояло вспомнить, что такое кривая Коха и как она устроена. Впервые эта кривая была описана в 1904 году Нильсом Фабианом Хельге фон Кохом – шведским математиком, специалистом преимущественно по теории чисел, задолго до того времени, когда появился раздел математики, называемый фрактальной геометрией.

Кох изучал кривую, чтобы показать что кривая, которая не выходит за пределы пространства, может иметь бесконечную длину. Вот как он это делал: кривая Коха начинается с построения двух точек, между точек строится отрезок, который делится на три равные части. Средняя часть удаляется, а над удаленной частью строятся стороны равностороннего треугольника. Описанный процесс повторяется к каждому из меньших отрезков. И так – теоретически до бесконечности.

Вот так полученный результат демонстрирует, что кривая в конечной области пространства может иметь бесконечную длину. На каждом шаге построения длина кривой больше, чем на предыдущем. Если процесс повторить бесконечное число раз, то кривая останется заключенной в конечной области, а её длина станет неограниченной [7].

Попробуем и мы повторить тоже самое в программе «Живая математика»: запускаем программу и создаём новый чертёж. Далее с помощью инструмента Отрезок рисуем отрезок АВ, делим его на 3 равные части, удаляем среднюю часть и строим над ней стороны равностороннего треугольника (Рис.5.5.2). При помощи команды Итерации повторяем всё тоже самое для меньших от-

резков. У нас получился фрактал – кривая Коха (Рис.5.5.4).

Задаем фон нашего чертежа (голубой) и построим внутреннюю область треугольника CDE при помощи команды Внутренняя область (Рис.5.5.5). Далее задаем цвет (белый). Это цвет нашей будущей снежинки. При помощи команды Итерации строим внутреннюю область всей кривой Коха (Рис.5.5.7). Далее создаем инструмент Снежинка, который позволит нам завершить построение фигуры снежинки Коха. Строим равносторонний треугольник АВК (точка К получилась при построении образа точки А относительно точки В с поворотом на 60 градусов) (Рис.П5.5.7). Применим инструмент Снежинка к сторонам ВК и КА. Фигура снежинки Коха построена (Рис.П5.5.8)! Заданный алгоритм позволяет нам за считанные секунды построить любое количество самоподобных фигур разного размера.

Если сравнить фигуры снежинок Коха, построенные мной в программе Photoshop и в программе «Живая Математика», мы увидим: насколько точнее и красивее получилась вторая фигура, насколько больше в ней итераций и насколько проще повторить точно такую же фигуру, изменив её размер. Кроме того, в программе «Живая Математика», можно очень быстро изменить число и глубину итераций, нажимая на клавиши + и -, что мгновенно отразится на виде фигуры.

Заключение

Работа над проектом позволила мне сделать следующие выводы.

1. Основная причина применения фракталов в различных науках заключается в том, что они очень точно описывают реальный мир. Модели, построенные на основе фрактальных изображений, позволяют с большой достоверностью представлять космическое пространство и ткани внутренних органов живых организмов, поверхности морей, изгибы береговых линий и др. Именно поэтому, фракталы стали незаменимыми помощниками астрофизиков, медиков, геологов. Фракталы очень разнообразны, как и их применение.

2. Фракталам посвящены тысячи публикаций и огромные ресурсы в международной компьютерной сети Интернет, однако для многих специалистов далеких от информатики данный термин представляется абсолютно новым. Поэтому, по нашему мнению, фракталы, как объекты, представляющие интерес для специалистов различных отраслей знания, должны получить надлежащее место в курсах математики и информатики.

3. Наука о фракталах очень молода, они стали появляться с развитием компьютерных технологий, многое еще не изучено и многое еще предстоит открыть. Фракталы можно применять не только в точных науках, но и практически во всем, что нас окружает: одежда, элемент декора интерьера, дизайн открыток, штор и многое другое. В этом мы можем убедиться на конкретном примере, представленном в практической части работы: создание мультфильмов с использованием фрактальных моделей. Кроме того, это очень яркие, сочные, изумительные по своей красоте изображения, которые доставляют огромное эстетическое удовольствие.

4. Создавать свои собственные фракталы и даже мультфильмы может каждый, используя доступные графические программы и видео редакторы. От самого процесса создания совершенно для нас нового

и одновременно невероятно красивого, порой фантастического, получаешь массу удовольствия.

Создавая снежинку Коха в программе «Живая Математика», я познакомилась с новой техникой построения этой фигуры, отличной от той, что я строила в прошлом году, поворачивая и уменьшая треугольники. Фигура, построенная в «Живой Математике» конечно же получилась более красивой, с наибольшим количеством итераций, кроме того, задав алгоритм, я могу построить большое количество снежинок, разных размеров, и даже форм и все они будут самоподобны.

4. Изучая алгебраические фракталы я построила треугольник Паскаля и увеличивая количество строк в нём убедилась, что он стремится к некоторому пределу, который представляет собой треугольник Серпинского.

Приложение № 1

Виды фракталов



Рис. 1.1. Пыль Кантора

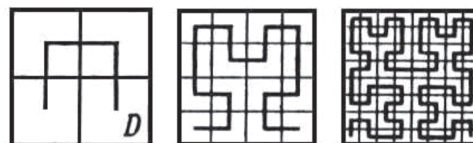
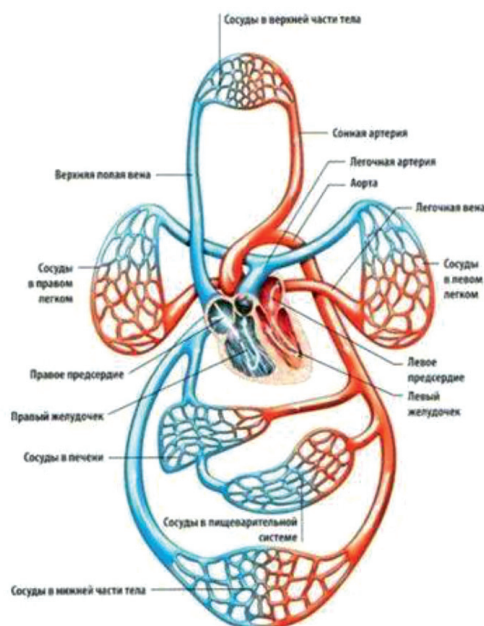
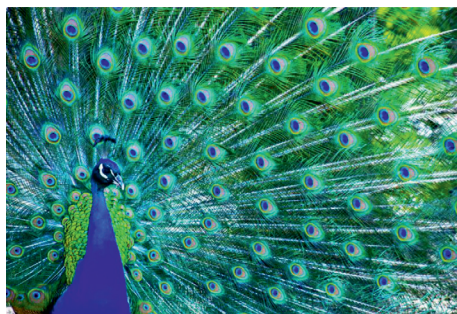


Рис. 1.2. Кривая Пеано

Рис. 2.1. Природные фракталы.
Кровеносная система человека



Оперение павлина



Морская звезда



Лист папоротника



Снежинка



Морозный узор



Рис. 2.2. Геометрический фрактал.

Снежинка Коха



Рис. 2.3. Геометрический фрактал.

Снежинка Коха

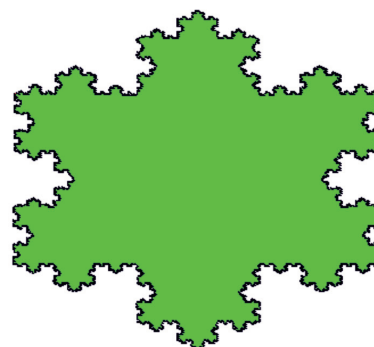


Рис. 2.4. Геометрический фрактал.

Древо Пифагора

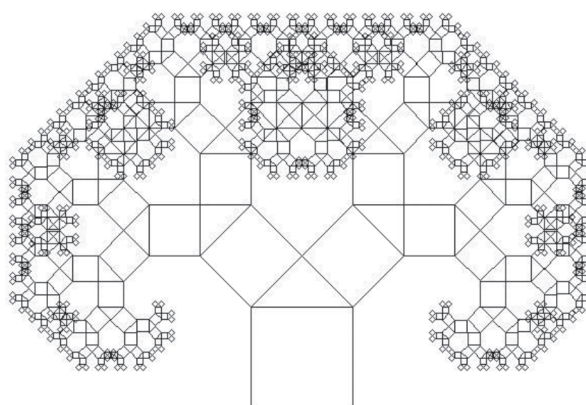


Рис. 2.5. Геометрический фрактал.

Древо Пифагора после художественной обработки

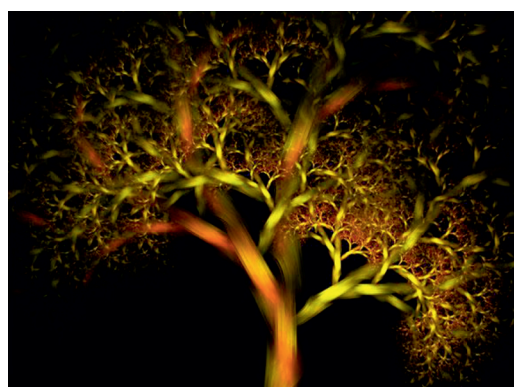


Рис. 2.6. Геометрический фрактал.

Дракон Хартера



Рис. 2.7. Геометрический фрактал.

Дракон Хартера

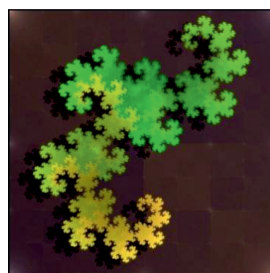


Рис. 2.8. Алгебраический фрактал.

Множество Мандельброта

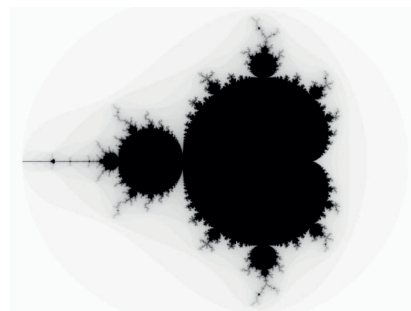


Рис. 2.9. Алгебраический фрактал.
Треугольник Паскаля

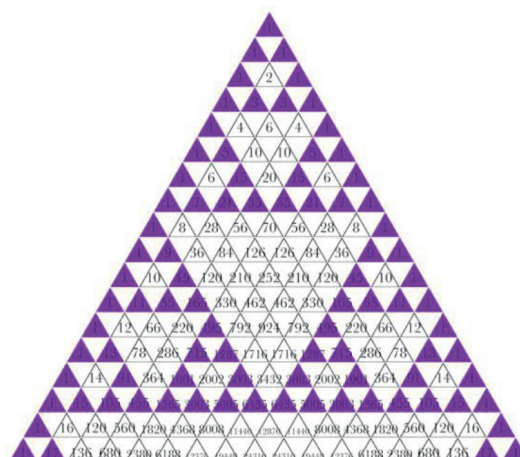
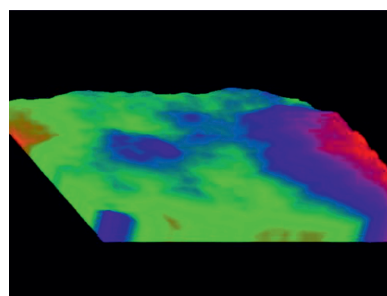


Рис. 2.10. Стохастический фрактал.
Плазма



Список литературы

1. Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство / А.И. Азевич // Математика в школе. – №4. – 2005. – С. 76 – 78.
2. Корблан Ф. Золотое сечение. Математический язык красоты / Ф. Корблан, пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2013. – 160 с.
3. Терехова, Н.Ю. Фрактальная графика: методические указания к лекциям и лабораторным работам по курсу «Основы графического дизайна». – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 24 с.
4. Саква Д.Ю. Фракталы вокруг нас. 2005, URL: <http://www.codenet.ru/progr/fract/Fractals-Around>
5. Ринчино А. Теория фракталов. 2002, URL: <http://multifractal.narod.ru>
6. Шабат Г.Б. Живая Математика: сборник методических материалов / Г.Б. Шабат. – М.: ИНТ. – 176 с.
7. Кириллов А.А. Повесть о двух фракталах / А.А. Кириллов. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2016. – 176 с.