

«Практическое применение теорем Чебы и Менелая»

Запольских Мария Владимировна

Математика

*9 класс МБОУ Школа №156, Орджоникидзевского района Г.О. г. Уфа,
р. Башкортостан*

*Научный руководитель: Шамиева Инга Энгелевна, учитель математики
МБОУ Школы №156, высшая квалификационная категория*

Нередко учащиеся 9 и 11 классов сталкиваются с трудностями при решении практических задач на экзамене по математике. Это вторая часть ОГЭ/ЕГЭ, которая является наиболее сложной, и, соответственно, за которую можно набрать хорошее число баллов. Знание теорем Чебы и Менелая может значительно упростить решение таких задач.

Помимо экзаменов, изучение данной темы может помочь на олимпиадах, вступительных испытаниях и просто для погружения в удивительный математический мир.

Объект исследования: геометрические задачи, требующие нахождения отношений длин отрезков, площадей фигур.

Гипотеза: применение теорем Чебы и Менелая при решении многих задач рациональнее, чем другие способы решения.

Цель работы: Доказать теоремы Чебы и Менелая, выяснить, насколько их применение упрощает решение задач на отношение отрезков и площадей фигур.

Задачи:

- Рассмотреть доказательство теорем Чебы и Менелая
- Решить несколько задач с их помощью и другими способами.
Выяснить какой из методов рациональнее в каждом конкретном случае
- Создать банк задач, при решении которых применение теорем Чебы и Менелая предпочтительнее.

Результатом исследования является презентация, которая поможет выпускникам 9 и 11 классов познакомиться с методом решения задач на нахождение отношений длин отрезков и площадей фигур с помощью теорем Чебы и Менелая.

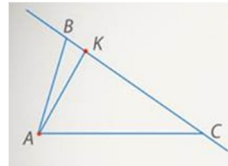
2. Теоретическая часть

2.1 Теорема Чева

2.1.1 Кто такой Чева? Джованни Чева (1648-1734 г.)- итальянский инженер и математик. Основной заслугой Чева является построение учения о секущих, которое положило начало новой – синтетической геометрии; оно изложено в сочинении «О взаимнопересекающихся прямых»(1678).

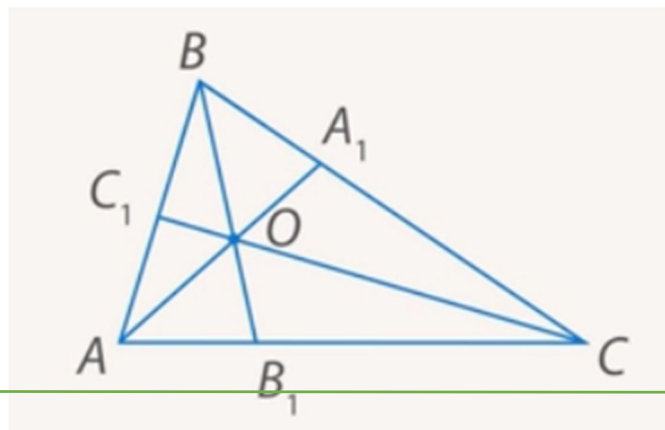


2.1.2 Что такое чевиана? Определение. **Чевианой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с произвольной точкой противоположащей стороны, или ее продолжения.



1.1.3 Теорема Чева Если на сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС взяты соответственно точки С₁, А₁ и В₁, то отрезки АА₁, ВВ₁ и СС₁ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

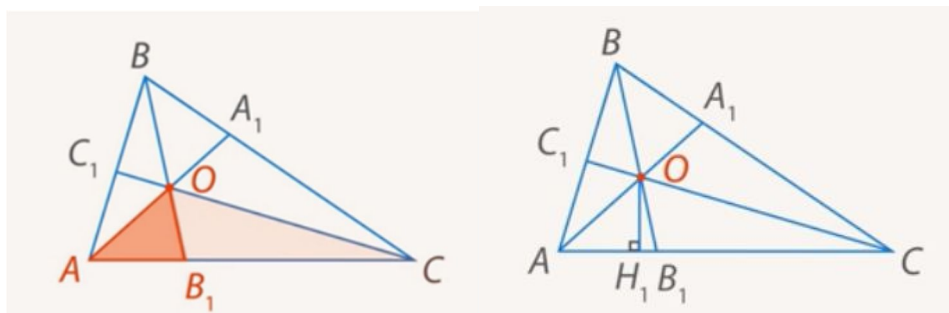
Рассмотрим треугольники АОВ₁ и СОВ₁



Поскольку их основания лежат на одной прямой, то у этих треугольников общая высота, опущенная из точки О. Отсюда следует, что площади этих

треугольников относятся так же, как их основания:

$$\frac{S_{AOB_1}}{S_{COB_1}} = \frac{AB_1}{B_1C}$$



Аналогично можно выписать еще два соотношения:

$$\frac{S(BOC_1)}{S(AOC_1)} = \frac{BC_1}{C_1A}, \quad \text{и} \quad \frac{S(COA_1)}{S(BOA_1)} = \frac{CA_1}{A_1B}$$

Перемножая эти три равенства получаем:

$$\frac{S_{AOB_1} \cdot S_{BOC_1} \cdot S_{COA_1}}{S_{COB_1} \cdot S_{AOC_1} \cdot S_{BOA_1}} = \frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{B_1C \cdot C_1A \cdot A_1B}$$

Рассмотрим левую часть данного равенства. Запишем её иначе.

Треугольники AOB_1 и BOA_1 имеют равные углы. Значит, их площади относятся как произведения длин сторон, заключающих эти углы.

$$\text{То есть: } \frac{S(AOB_1)}{S(BOA_1)} = \frac{AO \cdot B_1O}{BO \cdot A_1O}$$

Аналогично можно выписать еще два соотношения:

$$\frac{S(BOC_1)}{S(COB_1)} = \frac{BO \cdot C_1O}{CO \cdot B_1O} \quad \text{и} \quad \frac{S(COA_1)}{S(AOC_1)} = \frac{A_1O \cdot CO}{C_1O \cdot AO}.$$

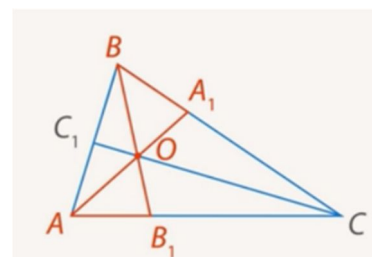
Перемножив эти равенства, получаем:

$$\frac{S(AOB_1)}{S(BOA_1)} \cdot \frac{S(BOC_1)}{S(COB_1)} \cdot \frac{S(COA_1)}{S(AOC_1)} = 1.$$

Имеем:

$$\frac{S(AOB_1) \cdot S(BOC_1) \cdot S(COA_1)}{S(BOA_1) \cdot S(COB_1) \cdot S(AOC_1)} = \frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A} = 1.$$

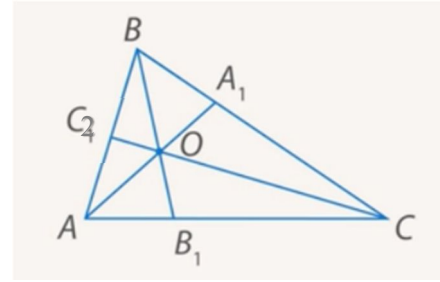
Докажем обратное утверждение.



Пусть точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах так, что выполнено равенство:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (1)$$

Докажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.



Обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 и проведем прямую CO . Она пересекает сторону AB в некоторой точке, которую обозначим C_2 . Т.к. отрезки AA_1, BB_1 и CC_2 пересекаются в одной точке, то, по доказанному в первом пункте: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1 \quad (2)$

Сопоставляя равенства (1) и (2): $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1$,

приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$, которое показывает, что точки C_1 и C_2 делят сторону AB в одном и том же отношении. Следовательно, точки

C_1 и C_2 совпадают, и, значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . ■

1.2 Теорема Менелая

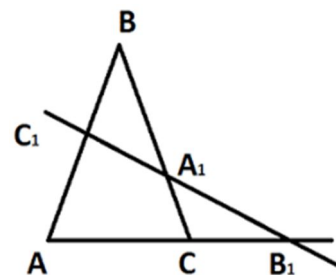
1.2.1 Кто такой Менелай? Древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги "Сферики" (сохранились в арабском переводе). Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему о прямой, пересекающей стороны треугольника (теорема Менелая).



1.2.2 Формулировка и доказательство теоремы Менелая

Дан треугольник ABC . На прямых AB, BC и AC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



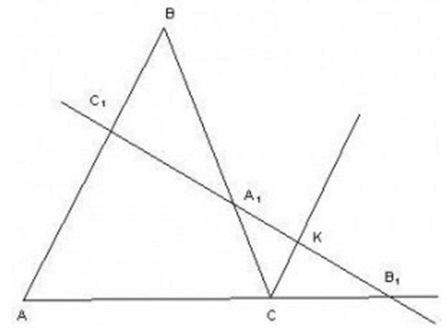
Доказательство.

1. Проведем через точку С прямую, параллельную АВ. Обозначим через К ее точку пересечения с прямой В₁С₁.

Треугольники АС₁В₁ и СКВ₁ подобны по двум углам.

Следовательно, $\frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}$.

Треугольники СКА₁ и ВС₁А₁ также подобны, значит, $\frac{CK}{C_1B} = \frac{A_1C}{BA_1}$.



Далее, перемножив полученные равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_1A}{B_1C} * \frac{A_1C}{BA_1}, \text{откуда следует, что: } \frac{C_1B}{AC_1} * \frac{A_1C}{BA_1} * \frac{B_1A}{CB_1} = 1$$

или : $\frac{AC_1}{C_1B} * \frac{BA_1}{A_1C} * \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Теорема доказана.

2. Докажем обратное утверждение. Пусть точка В₁ взята на продолжении стороны АС, а точки С₁ и А₁ - на сторонах АВ и ВС, причем так, что выполнено равенство: $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ (1)

Докажем, что точки А₁, В₁, С₁ лежат на одной прямой. (рис.2)

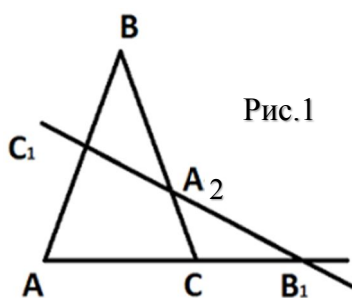


Рис.1

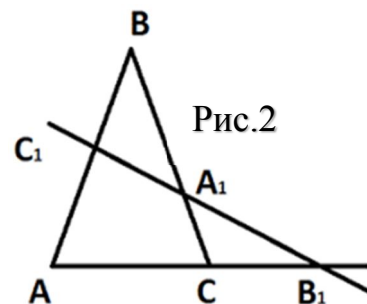


Рис.2

Прямая В₁С₁ пересекает сторону ВС в некоторой точке А₂. (рис.1)

Т.к. точки В₁, С₁, А₂ лежат на одной прямой, то по доказанному в первом пункте: $\frac{AB_1}{B_1C} * \frac{CA_2}{A_2B} * \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ (2)

Сопоставляя (1) и (2), приходим к равенству $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_2}{A_2B}$, которое показывает, что точки A_1 и A_2 делят сторону BC в одном и том же отношении. Следовательно, точки A_1 и A_2 совпадают, и, значит, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. ■

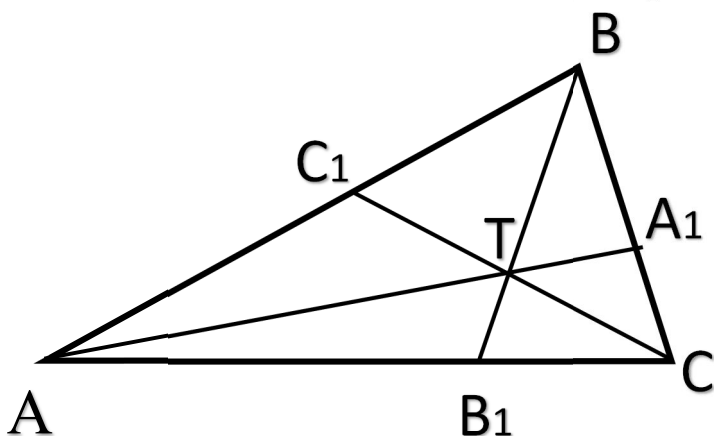
3. Практическая часть

С помощью теорем Чебы и Менелая нетрудно доказать теоремы о четырех замечательных точках треугольника, теоремы Ван-Обеля и Симпсона. Остановимся на двух последних теоремах подробнее.

3.1 Теорема Ван-Обеля

Пусть чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке T , тогда справедливо равенство:

$$\frac{BT}{TB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$$



1. Для треугольника ABV_1 и секущей CC_1 запишем теорему Менелая:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BT}{TB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1; \text{ откуда получим } \frac{C_1B}{AC_1} = \frac{BT}{TB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} \quad (1)$$

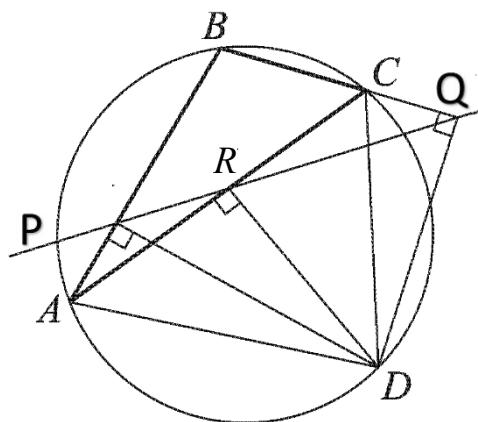
2. Для треугольника BB_1C и секущей A_1A , запишем теорему Менелая:

$$\frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BT}{TB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = 1; \text{ откуда следует, что: } \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BT}{TB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} \quad (2)$$

3. Сложив (1 + 2), получим $\frac{BC_1}{AC_1} + \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BT}{TB_1} \left(\frac{B_1C}{AC} + \frac{B_1A}{AC} \right) = \frac{BT}{TB_1} \cdot \frac{AC}{AC} = \frac{BT}{TB_1}$.

Итак, $\frac{BT}{TB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$. ■

3.2 Теорема Симсона (Симпсона)



Пусть D – произвольная точка описанной около треугольника ABC окружности. DP , DR , DQ – перпендикуляры к сторонам AB , AC и продолжению стороны BC соответственно. Докажем, что основания перпендикуляров P , R , Q лежат на одной прямой

Формулировка:

Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой

Доказательство (Способ 1.)

Сделаем доп. построение – проведем отрезки AD и CD .

1) Т.к. $\angle APD = 90^\circ$ и $\angle ARD = 90^\circ$,

то точки A, P, R, D лежат на одной окружности с диаметром AD .

Тогда $\angle PRA = \angle PDA$, т.к. они опираются на одну дугу.

2) Т.к. $\angle CQD = \angle CRD = 90^\circ$,

то точки Q, C, R, D лежат на одной окружности с диаметром CD .

Следовательно вписанные углы $\angle CRQ = \angle CDQ$ как опирающиеся на одну дугу.

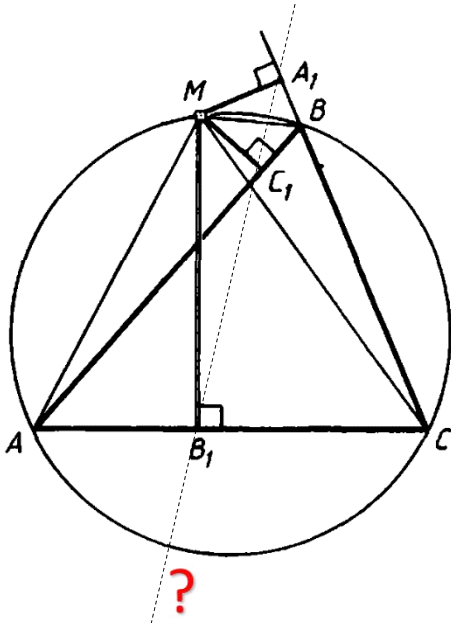
$$\angle PDA = 90^\circ - \angle PAD = 90^\circ - \angle BAD$$

$$\angle QDC = 90^\circ - \angle QCD = 90^\circ - (180^\circ - \angle BCD) = 90^\circ - \angle BAD$$

Итак, $\angle PDA = \angle QDC$, следовательно, $\angle PRA = \angle CRQ$.

Это означает, что точки P , R , Q лежат на одной прямой.

Теорема доказана.



Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на стороны вписанного треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой. (Эта прямая называется п р я м о й

С и м п с о н а .)

Д-ть: точки B1, C1, A1 лежат на одной прямой

Доказательство (Способ 2)

1) Вписанные углы $\angle MAB$ и $\angle BCM$ равны, т.к. опираются на одну дугу.

Тогда прямоугольные треугольники AC_1M и CA_1M подобны по двум углам.

Получаем пропорцию: $\frac{AC_1}{CA_1} = \frac{AM}{CM} \quad (1)$

2) Вписанные углы $\angle MBA = \angle MCA$, т.к. опираются на одну дугу.

Тогда прямоугольные треугольники BC_1M и CB_1M подобны по двум углам.

Получаем пропорцию: $\frac{CB_1}{BC_1} = \frac{CM}{BM} \quad (2)$

3) $\angle MAC = 180^\circ - \angle MBC$ (Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника)

4) $\angle A_1BM = 180^\circ - \angle MBC$ (Смежные углы $\angle A_1BM$ и $\angle MBC$)

Итак, $\angle MAC = \angle A_1BM$.

Тогда прямоугольные треугольники BA_1M и AB_1M подобны по двум углам.

Откуда следует отношение: $\frac{BA_1}{AB_1} = \frac{BM}{AM} \quad (3)$

5) Перемножим (1), (2), (3) равенства

$$\frac{AC_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{AB_1} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BM}{AM} = 1; \text{ то есть } \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Для треугольника ABC и секущей B_1A_1 выполняется теорема Менелая, поэтому мы можем утверждать, что точки B1, C1, A1 лежат на одной прямой.

Теорема доказана. ■

3.3 Решение задач с помощью теорем Чевы, Менелая, Ван-Обеля и Симпсона

3.3.1 Задача №1

Дано: . В треугольнике ABC точки A_1, B_1 лежат соответственно на сторонах BC и AC . P — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 . $AB_1 : B_1C = 7 : 8$, $CA_1 : A_1B = 4 : 3$. Найдите отношение $BP : PB_1$.

Решение. Обозначим $AB_1 = 7m$, $B_1C = 8m$,

$CA_1 = 4k$, $A_1B = 3k$ (рис. 17).

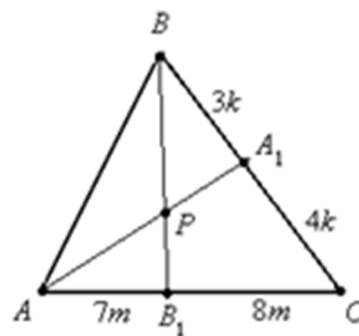
По теореме Менелая для треугольника BCB_1 и секущей PA_1 запишем верное равенство:

$$\frac{BP}{PB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{BP}{PB_1} = \frac{AC}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{CA_1} = \frac{15m}{7m} \cdot \frac{3k}{4k} = \frac{45}{28}.$$

Ответ. $\frac{45}{28}$.



3.3.2 Задача №2

Дано: Три окружности с центрами A, B, C , радиусы которых относятся как $11 : 12 : 9$, касаются друг друга внешним образом в точках X, Y, Z как показано на рисунке 19. Отрезки AX и BY пересекаются в точке O . В каком отношении, считая от точки B , отрезок CZ делит отрезок BY ?

Решение. Обозначим $AY = 11k$, $CX = 9k$, $BZ = 12k$ (рис. 19). Так как

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = \frac{11k \cdot 9k \cdot 12k}{9k \cdot 11k \cdot 12k} = 1,$$

то по утверждению б) теоремы Чевы отрезки AX, BY и CZ

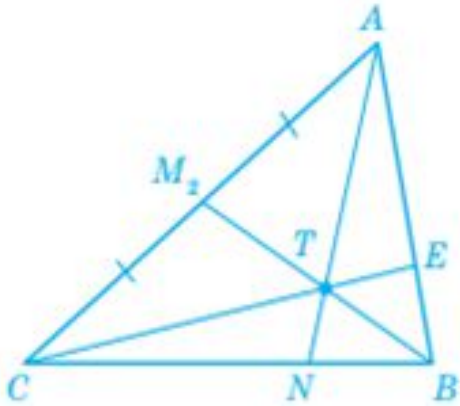
пересекаются в одной точке — точке O . Тогда отрезок CZ делит отрезок BY в отношении $\frac{BO}{OY}$. Найдем это отношение.

По теореме Менелая для треугольника BCY и секущей OX имеем: $\frac{BO}{OY} \cdot \frac{YA}{AC} \cdot \frac{CX}{XB} = 1$, откуда

$$\text{следует, что } \frac{BO}{OY} = \frac{20k}{11k} \cdot \frac{12k}{9k} = \frac{80}{33}.$$

Ответ. $\frac{80}{33}$.

3.3.4 Задача №4



Дано:

На стороне BC треугольника ABC взята точка N такая, что $3BN=CN$.

В каком отношении прямая AN делит медиану BM_2 ?

Решение:

Пусть AN и BM_2 пересекаются в точке T . Пусть также $E = (CT) \cap (AB)$.
Запишем теорему Чевы для треугольника ABC и чевиан AN , BM_2 и CE :

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = 1; \text{ или: } \frac{AE}{BE} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{1} = 3$$

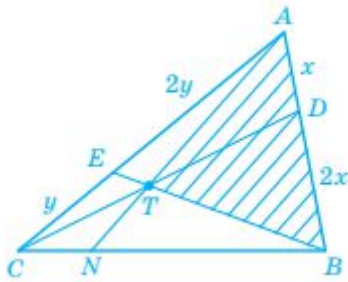
$$\text{Откуда: } \frac{AE}{BE} = \frac{3}{1}, \text{ то есть } \frac{BE}{AE} = \frac{1}{3}.$$

Тогда по теореме Ван-Обеля получаем:

$$\frac{BT}{TM_2} = \frac{BE}{AE} + \frac{BN}{CN} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{BT}{TM_2} = \frac{2}{3}$$

3.3.5 Задача №5.



Дано:

На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E такие, что $AD:DB = 1:2$ и $AE:EC = 2:1$. T — точка пересечения BE и CD .

Найдите отношение площадей треугольников ATB и ABC .

Решение:

По теореме Ван-Обеля находим:

$$\frac{AT}{TN} = \frac{AE}{EC} + \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\text{Значит, } \frac{S(NTB)}{S(TAB)} = \frac{2}{5} \Rightarrow S(NTB) = \frac{2}{5}S(TAB)$$

(основания TN и AT в этих треугольниках относятся как $2:5$, а высота у них общая).

$$\text{Тогда: } S(ANB) = \frac{7}{5}S(ATB);$$

Теорема Чевы поможет найти отношение $BN:NC$.

Действительно, составим равенство Чевы для треугольника ABC и его чевиан:

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1; \text{ или } \frac{BN}{NC} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Откуда } \frac{BN}{NC} = \frac{4}{1};$$

$$\text{Значит } \frac{BN}{BC} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Поскольку } \frac{S(ANB)}{S(ABC)} = \frac{4}{5} \text{ (основания относятся как } 4:5, \text{ и высота общая),}$$

$$\text{то имеем: } \frac{\frac{7}{5}S(ATB)}{S(ABC)} = \frac{4}{5};$$

$$\text{откуда } \frac{S(ATB)}{S(ABC)} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S(ATB)}{S(ABC)} = \frac{4}{7}$$

3.3.6. Задача №6

В $\triangle ABC$ на стороне BC взята точка N так, что $NC = 3BN$. На продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что $MA = AC$. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F . Найти отношение $\frac{BF}{FA}$.

Дано: $\triangle ABC$, $N \in BC$, $NC = 3BN$, CA – луч, $M \in CA$, $MA = AC$, $MN \cap AB = F$.

Найти отношение $\frac{BF}{FA}$.

Решение. I способ (без использования теоремы Менелая).

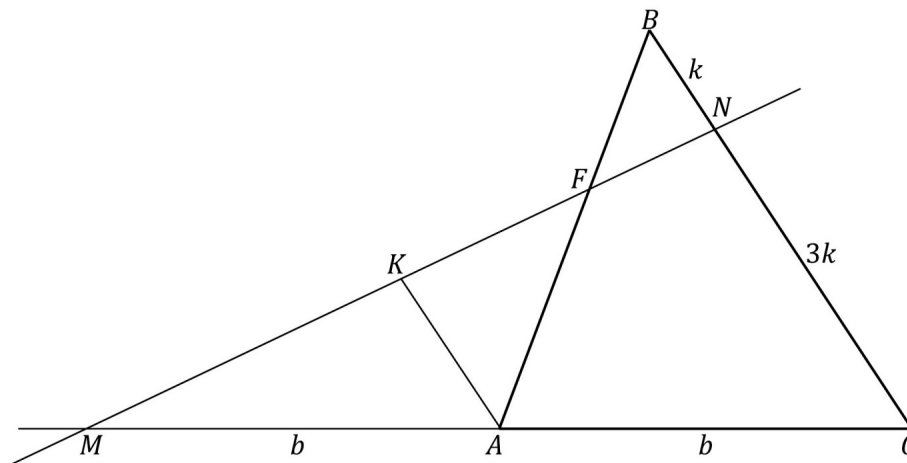


Рис. 8

Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок $AK \parallel BC$ (рис.8) .

Пусть $BN = k$, тогда $NC = 3k$; пусть $AC = b$, тогда $MA = b$.

1) Рассмотрим $\triangle MKA$ и $\triangle MNC$.

$\angle AMK = \angle CMN$ – общий угол для $\triangle MKA$ и $\triangle MNC$;

$\angle MKA = \angle MNC$ как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых AK и BC ($AK \parallel BC$ по дополнительному построению) секущей MN , $K \in MN$. Следовательно, $\triangle MKA \sim \triangle MNC$ по двум углам.

Итак, k_1 – коэффициент подобия: $k_1 = \frac{MA}{MC} = \frac{AK}{NC}$; $\frac{MA}{MA+AC} = \frac{AK}{NC}$; $\frac{b}{2b} = \frac{AK}{3k}$; $\frac{AK}{3k} = \frac{1}{2}$; $2AK = 3k$.

И, значит, $AK = \frac{3k}{2}$.

2) Рассмотрим $\triangle BFN$ и $\triangle AFK$.

$\angle BFN = \angle AFK$ как вертикальные углы;

$\angle KAF = \angle NBF$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AK и BC секущей MN , $K \in MN$, $F \in MN$.

Следовательно, $\triangle BFN \sim \triangle AFK$ по двум углам.

Итак, k_2 – коэффициент подобия: $k_2 = \frac{BF}{FA} = \frac{BN}{AK}$; $\frac{BF}{FA} = \frac{k}{AK}$.

Но, так как по доказанному: $AK = \frac{3k}{2}$, то мы получаем, что:

$$\frac{BF}{FA} = \frac{k}{\frac{3k}{2}} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}. \quad \frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}$.

II способ (с использованием теоремы Менелая)

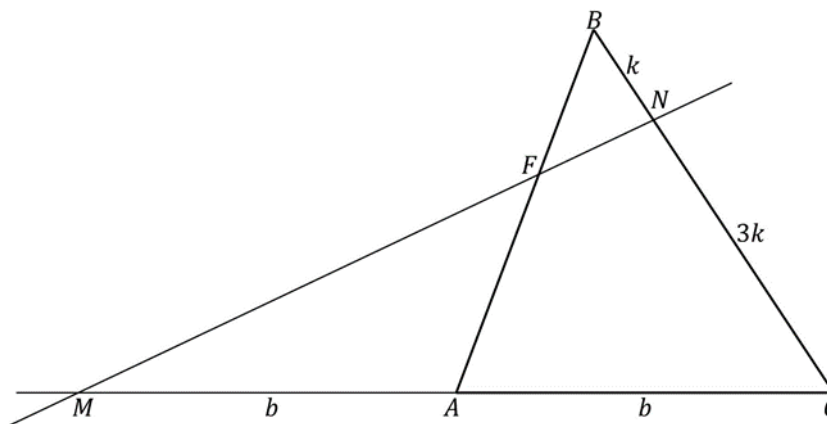


Рис. 9

Пусть $BN = k$, тогда по условию ($NC = 3BN$): $NC = 3k$; пусть $AC = b$, тогда по условию $MC = MA = b$.

Прямая MN пересекает две стороны $\triangle ABC$ ($MN \cap AB = F$, $MN \cap BC = N$) и продолжение третьей (CA – луч, $MN \cap CA = M$), значит, по теореме Менелая: $\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1$; $\frac{3k}{k} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{b}{2b} = 1$; $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{3}{2} = 1$. И, значит, $\frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{BF}{FA} = \frac{2}{3}$.

Как видим, использование теоремы Менелая значительно упрощает решение этой задачи.

Перечень используемой литературы и интернет-ресурсов

1. Атанасян, Л.С. Доп. главы к шк. учеб. 8 кл.: Учеб. Пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.:Просвещение, 1996. – 205с.
2. Вольфсон, Б. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9: учимся решать задачи / Б. И. Вольфсон, Л. И. Резницкий - Легион, 2011 г. – 129с.
3. Шевкин А. Вокруг теорем Чебы и Менелая //Математика. — № 9. — 2011.
4. Ларин, А.А. «Математика. [Электронный ресурс] / Репетитор»/URL: <http://alexlarin.net/eg15.html>
5. Школа в «Кванте», 1996 год, Математика, №6

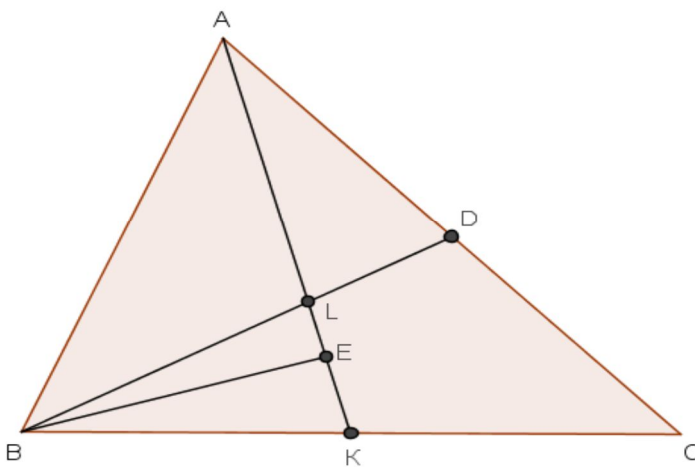
Приложение. Банк задач, для решения которых рекомендуется использовать теоремы Чебы, Менелая, Ван-Обеля и Симпсона

Задача №1

Катеты прямоугольного треугольника равны 9, 12 и гипотенуза равна 15. Найдите расстояние между точкой пересечения биссектрис и точкой пересечения медиан.

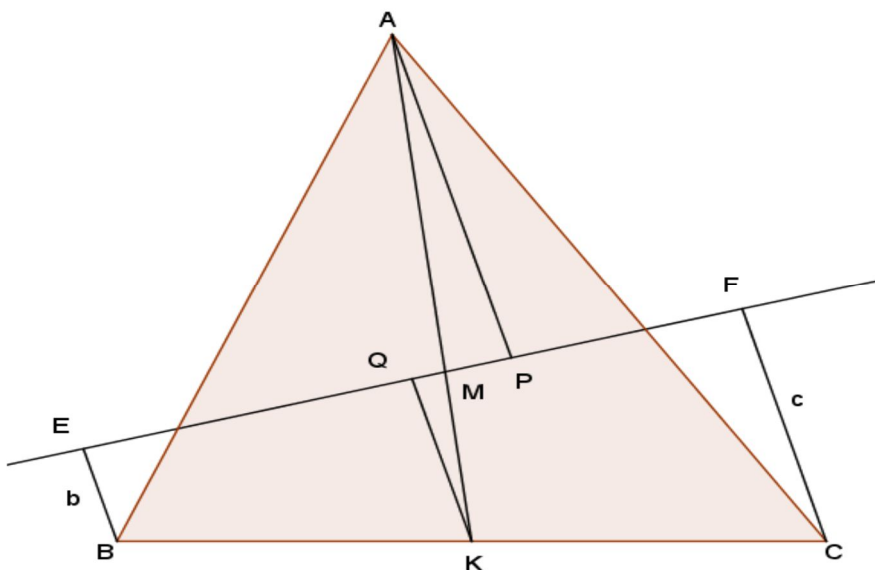
Задача №2

В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника KCDL равна 5.



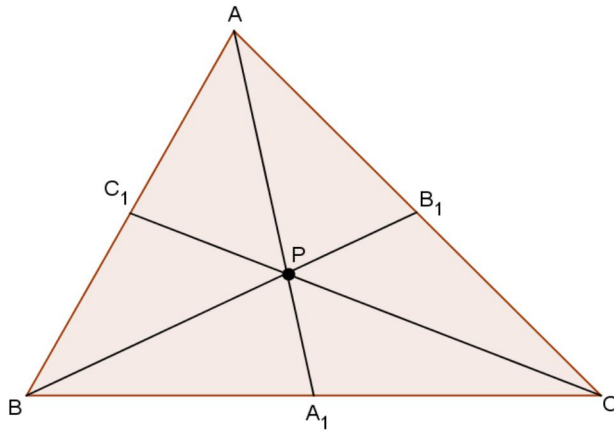
Задача №3

Через точку пересечения медиан треугольника ABC проходит прямая, пересекающая стороны AB и AC. Расстояния от вершин B и C до этой прямой равны b и c соответственно. Найдите расстояние от вершины A до этой прямой.



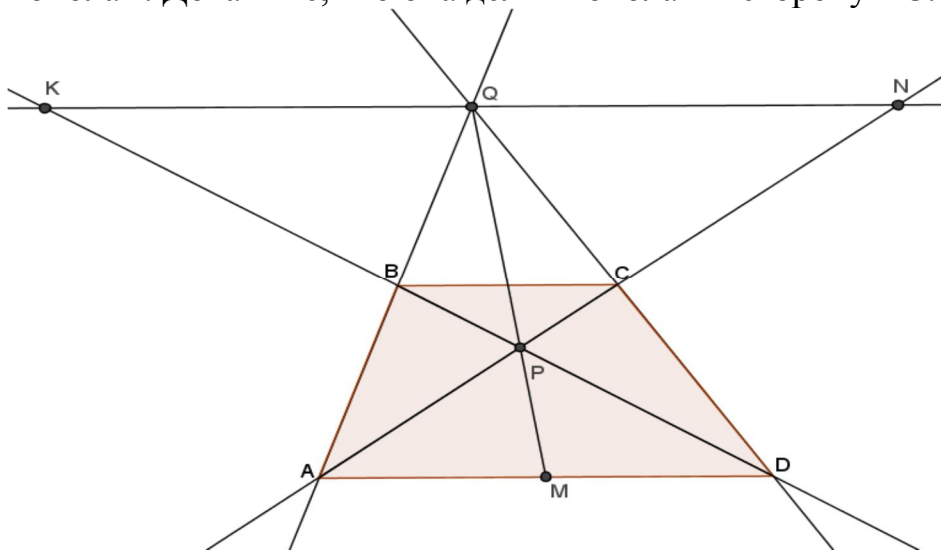
Задача №4

Через точку P , лежащую на медиане CC_1 треугольника ABC , проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA соответственно). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.



Задача №5

Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .



Задача №6

Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK , и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE . Прямая, проходящая через точку B параллельно CE , пересекает CK в точке F . Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.