

Научно-исследовательская работа

Предмет – Математика

Тема работы

«Возводить в квадрат легко и просто»

Выполнила:

Шмакова Алина Романовна

учащаяся 6А класса

Муниципального образовательного учреждения-Средней общеобразовательной школы №22 п. Беркакит Нерюнгринского района Республики Саха (Якутия)

Руководитель:

Лаптева Татьяна Павловна

Учитель математики МОУ СОШ №22 п. Беркакит

Введение.

Математика – очень древняя наука. Многие понятия, правила, законы, формулы уже известны давно, и открыть что-то новое, просто невозможно. Всё равно на уроке математики мы открываем для себя новые знания. Из года в год наши знания увеличиваются. Например, при изучении темы «Степень» узнали, что произведение одинаковых множителей можно записать, как степень данного числа. Так мы познакомились с квадратом и кубом числа.

Устно возводить в квадрат однозначное число легко, для этого надо знать всего лишь таблицу умножения. А как устно возвести в квадрат двузначное число, меня очень заинтересовало.

Умея это выполнять, мы откажемся от письменного умножения. Конечно, можно посмотреть в таблицу квадратов, но она не всегда под руками.

Цель проекта: Поиск приёмов быстрого возведения чисел в квадрат.

Задачи: 1) Познакомиться с историей возникновения степени числа.

2) Изучить приёмы быстрого возведения чисел в квадрат.

3) Вывести свой способ возведения чисел в квадрат.

4) Выбрать из всех самый оптимальный способ.

Гипотеза: Применение приёмов быстрого возведения чисел в квадрат облегчает вычисления, повышает вычислительную культуру учащихся. Возводить в квадрат легко и просто.

Объект исследования: приёмы быстрого возведения чисел в квадрат.

Методы исследования: Анализ литературы. Поисковый метод. Сравнение.

Актуальность проекта: Во все времена умение производить в уме различные вычисления вызывает восхищение, это отличное упражнение, позволяющее поддержать мозг в состоянии «боевой готовности»[1]. Освоение способов устного возведения чисел в квадрат усиливает интерес к математике, развивает внимание, мышление, память, эрудицию и математические способности.

История возникновения квадрата числа.

Сложение, вычитание, умножение и деление идут первыми в списке арифметических действий. У математиков не сразу сложилось представление о **возведении в степень** как о самостоятельной операции, хотя в самых древних математических текстах Древнего Египта и Междуречья встречаются задачи на **вычисление степеней**[5].

В своей знаменитой «Арифметике» Диофант Александрийский [2] описывает первые натуральные степени чисел так:

«Все числа... состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжают, увеличиваясь до бесконечности. ...среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя; это же число называется стороной квадрата, затем кубы, получающиеся от умножения квадратов на их сторону, далее квадрато-квадраты — от умножения квадратов самих на себя, далее квадрато-кубы, получающиеся от умножения квадрата на куб его стороны, далее кубо-кубы — от умножения кубов самих на себя».

Прошло много времени и у Рене Декарта[3] в его «Геометрии» (1637) мы находим современное обозначение степеней a^n , a^2 ,... Любопытно, что Декарт считал, что a^2 не занимает больше места, чем a^2 и не пользовался этим обозначением при записи произведения двух одинаковых множителей.

Немецкий ученый Лейбниц[4] считал, что упор должен быть сделан на необходимости применения символики для всех записей произведений одинаковых множителей и применял знак a^2 [5].

Приёмы быстрого возведения чисел в квадрат.

Учись считать быстро! Для овладения этим навыком любому человеку нужны:

- Способности;
- Алгоритмы;
- Тренировка;
- Опыт.

Давайте познакомимся с некоторыми приёмами возведения в квадрат **двузначных чисел**, которые выполняются почти мгновенно[1].

Возведение в квадрат числа, оканчивающегося на 5.

1) $35^2 = 3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 + 5 \cdot 5 = 1200 + 25 = 1225$.

2) $75^2 = 5600 + 25 = 5625$.

3) $85^2 = 7225$.

 Чтобы возвести в квадрат число, оканчивающееся цифрой 5, надо умножить количество его десятков на следующее за ним число и приписать к произведению 25.

Возведение в квадрат числа, первая цифра которого равна 5.

1) $52^2 = (5 \cdot 5 + 2) \cdot 100 + 2 \cdot 2 = 2700 + 4 = 2704$.

2) $54^2 = (25 + 4) \cdot 100 + 16 = 2916$.

3) $58^2 = 3300 + 64 = 3364$.

4) $51^2 = 2601$.

 Чтобы возвести в квадрат двузначное число, первая цифра которого равна 5, надо к 25 прибавить число единиц и приписать квадрат числа единиц.

➤ Если квадрат числа единиц является однозначным числом, то перед ним записать цифру ноль.

Возведение в квадрат числа, оканчивающегося на 1.

1) 71^2 ; $71 \rightarrow 70 \rightarrow 70^2 = 4900$; $71^2 = 4900 + 71 + 70 = 5041$.

2) $41^2 = 1600 + 41 + 40 = 1881$.

3) $81^2 = 6400 + 161 = 6561$.

 При возведении в квадрат числа, оканчивающегося на 1, нужно округлить число до десятков, возвести новое число в квадрат, и прибавить к этому квадрату исходное число и число, полученное при округлении.

Возведение в квадрат числа, оканчивающегося на 9.

1) 59^2 ; $59 \rightarrow 60 \rightarrow 60^2 = 3600$; $59^2 = 3600 - 60 - 59 = 3600 - 119 = 3481$.

2) $29^2 = 900 - 29 - 30 = 841$.

3) $79^2 = 6400 - 159 = 6241$.

 При возведении в квадрат числа, оканчивающегося на 9, нужно его округлить до десятков, возвести новое число в квадрат и из этого квадрата вычесть исходное число и число, полученное при округлении.

Возведение в квадрат числа, оканчивающегося на 4.

1) 84^2 ; $84 \rightarrow 85 \rightarrow 85^2 = 7225$; $84^2 = 7225 - 84 - 85 = 7225 - 169 = 7056$.

2) $34^2 = 1225 - 34 - 35 = 1225 - 69 = 1156$.

3) $74^2 = 5625 - 149 = 5476$.

 При возведении в квадрат числа, оканчивающегося на 4, нужно заменить цифру 4 на 5, возвести новое число в квадрат и из этого квадрата вычесть исходное число и число, полученное заменой 4 на 5.

Возведение в квадрат числа, оканчивающегося на 6.

1) 56^2 ; $56 \rightarrow 55 \rightarrow 55^2 = 3025$; $56^2 = 3025 + 56 + 55 = 3025 + 111 = 3136$.

2) $36^2 = 1225 + 36 + 35 = 1296$.

3) $76^2 = 5625 + 151 = 5776$.

 При возведении в квадрат числа, оканчивающегося на 6, нужно заменить цифру 6 на 5, возвести новое число в квадрат, и прибавить к этому квадрату исходное число и число, полученное заменой 6 на 5.

Возведение в квадрат числа, близкого к 50.

а) Для чисел от 40 до 50 (числа пятого десятка). Опорное число – 15.

1) $44^2 = (15 + 4) \cdot 100 + (50 - 44)^2 = 1900 + 36 = 1936$.

2) $43^2 = 18 \cdot 100 + 7^2 = 1800 + 49 = 1849$.

3) $48^2 = 2300 + 4 = 2304$.

 Чтобы возвести в квадрат числа пятого десятка (41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49), надо к числу 15 прибавить число единиц числа, затем к полученной сумме приписать квадрат дополнения данного числа до 50.

б) Для чисел от 25 до 40 и до 50. Опорное число – 25.

1) $37^2 = (37 - 25) \cdot 100 + (50 - 37)^2 = 12 \cdot 100 + 13^2 = 1200 + 169 = 1369$.

Для этого приёма надо знать квадраты чисел от 1 до 25.

2) $28^2 = 3 \cdot 100 + 22^2 = 300 + 484 = 784$.

3) $46^2 = 2100 + 16 = 2116$.

4) $39^2 = 1400 + 121 = 1521$.

✚ Чтобы возвести в квадрат число от 25 до 50, надо из данного числа вычесть 25, результат умножить на 100 и прибавить квадрат дополнения данного числа до 50.

в) Для чисел от 50 до 60 (числа шестого десятка). Опорное число – 25.

1) $57^2 = (25 + 7) \cdot 100 + (57 - 50)^2 = 32 \cdot 100 + 7^2 = 3200 + 49 = 3249$.

2) $52^2 = 2700 + 4 = 2704$.

3) $59^2 = 3481$.

✚ Чтобы возвести в квадрат число шестого десятка (51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59), надо к 25 прибавить число единиц, затем к полученной сумме приписать квадрат разности данного числа и 50.

➤ Если квадрат числа единиц является однозначным числом, то перед ним записать цифру нуль.

г) Для чисел от 50 до 60 и до 75. Опорное слово – 25.

Для этого приёма надо знать квадраты чисел от 1 до 25.

1) $58^2 = (58 - 25) \cdot 100 + (58 - 50)^2 = 33 \cdot 100 + 8^2 = 3300 + 64 = 3364$.

2) $71^2 = 46 \cdot 100 + 21^2 = 4600 + 441 = 5041$.

✚ Чтобы возвести в квадрат числа от 50 до 75, надо из данного числа вычесть 25, результат умножить на 100 и прибавить квадрат разности данного числа и 50.

Возведение в квадрат числа, близкого к 100.

$97^2 = (97 - 3) \cdot 100 + 3^2 = 9400 + 9 = 9409$, где 3 – дополнение 97 до 100.

$94^2 = (94 - 6) \cdot 100 + 6^2 = 8800 + 36 = 8836$.

$98^2 = 9604$.

✚ Чтобы возвести в квадрат число, близкое к 100, надо из него вычесть дополнение данного числа до 100, к результату приписать квадрат дополнения.

➤ Если квадрат дополнения является однозначным числом, то перед ним записать цифру нуль.

Возведение в квадрат любого двузначного числа.

а) Метод «пирамидка».

$$38^2 = (30 + 8)^2 = (30 + 8) \cdot (30 + 8) = (30 + 8) \cdot 30 + (30 + 8) \cdot 8 = 30 \cdot 30 + 8 \cdot 30 + 30 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 3 \cdot 3 \cdot 100 + 3 \cdot 8 \cdot 10 + 3 \cdot 8 \cdot 10 + 8 \cdot 8 = 3^2 \cdot 100 + 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 10 + 8^2 = 9 \cdot 100 + 48 \cdot 10 + 64 = 964 + 480 = 1444.$$

Можно оформить решение так: $38^2 = 964$

24	$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ и $8^2 = 8 \cdot 8 = 64 \Rightarrow 964$
$+ 24$	$3 \cdot 8 \cdot 10 = 240$ или 24 десятка
1444	$3 \cdot 8 \cdot 10 = 240$ или 24 десятка, поэтому

 можно под числом 964 записать два раза число 24, сдвинув его на одну цифру влево, получилась «пирамидка».

$$27^2 = 449 + 280 = 729.$$

$$84^2 = 6416 + 640 = 7056.$$

б) Метод «перекидки».

$$42^2 = 42 \cdot 42 = (42 + 2) \cdot 40 + 2^2 = 44 \cdot 40 + 4 = 1760 + 4 = 1764$$

$$78^2 = (78 + 8) \cdot 70 + 64 = 86 \cdot 70 + 64 = 6020 + 64 = 6084.$$

в) Метод «округления».

1) Для чисел, у которых цифра единиц больше 5:

$$47^2 = 47 \cdot 47 = 50 \cdot (47 - 3) + 3^2 = 50 \cdot 44 + 9 = 2200 + 9 = 2209.$$

$$26^2 = 30 \cdot 22 + 16 = 660 + 16 = 676.$$

1) Для чисел, у которых цифра единиц меньше 5:

$$73^2 = 73 \cdot 73 = 70 \cdot (73 + 3) + 3^2 = 70 \cdot 76 + 9 = 5320 + 9 = 5329.$$

$$82^2 = 80 \cdot 84 + 4 = 6720 + 4 = 6724.$$

г) Метод замены квадрата числа произведением.

$$29^2 = (29 - 9) \cdot (29 + 9) + 9^2 = 20 \cdot 38 + 81 = 760 + 81 = 841.$$

$$86^2 = (86 - 6) \cdot (86 + 6) + 6^2 = 80 \cdot 92 + 36 = 7360 + 36 = 7396.$$

$$54^2 = 50 \cdot 58 + 16 = 2900 + 16 = 2916.$$

д) Метод понижения числа на единицу.

$$28^2 = (28 - 1)^2 + 28 + (28 - 1) = 27^2 + 28 + 27 = 729 + 55 = 784.$$

$$56^2 = 55^2 + 56 + 55 = 3025 + 111 = 3136.$$

Минус этого приёма в том, что квадрат данного двузначного числа выражаем через квадрат числа на единицу меньше, который надо либо вычислять, либо снова понижать, и так до бесконечности.

Возведение в квадрат любого двузначного числа по методу Алины.

Приёмов возведения двузначных чисел в квадрат много и все они разные. Для каждой группы чисел надо знать своё правило, а удержать все правила в уме иногда невозможно.

Собирая материал для проекта, мне захотелось вывести свой приём быстрого возведения двузначного числа в квадрат.

Очень понравился приём возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5. Он быстрый и понятный. А можно ли этот приём применить для любого числа? Изучая литературу, я нигде этого способа не увидела. Применяя его для любых двузначных чисел, вот что у меня получилось.

$$\text{Напомню: } 35^2 = 3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 + 5^2 = 1200 + 25 = 1225.$$

Возведём по этому способу в квадрат число 36.

Мы знаем, что $36^2 = 1296$.

$$3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 + 6^2 = 1200 + 36 = 1236, \text{ но } 1236 \neq 1296. \text{ Число } 1236 < 1296 \text{ на } 60.$$

Где же взять число 60? Можно догадаться, что $60 = 30 \cdot 2$, то есть удвоенное число десятков. Тогда получаем:

$$36^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 6^2 + 30 \cdot 2 = 1236 + 60 = 1296.$$

Рассмотрим другие примеры.

$$56^2 = 5 \cdot 6 \cdot 100 + 6^2 + 50 \cdot 2 = 3000 + 36 + 100 = 3036 + 100 = 3136.$$

$$46^2 = 2036 + 40 \cdot 2 = 2036 + 80 = 2116.$$

Я много раз возводила числа в квадрат и увидела такую закономерность:

- 1) Выпишем цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- 2) В этом ряду цифра 5 занимает середину; 4 и 6 отличаются от 5 на 1, они стоят на первом месте от 5; 3 и 7 – на втором; 2 и 8 – на третьем; 1 и 9 на четвёртом.

Пусть, например, надо возвести в квадрат число 39. Цифра 9 стоит на четвёртом месте от цифры 5, число 4 удваиваем, это будет 8, а теперь применяем приём:

$$39^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 9^2 + 30 \cdot 8 = 1200 + 81 + 240 = 1281 + 240 = 1521.$$

240 можно представить так: $30 \cdot 2 \cdot 4$, то есть десятки числа удвоить и умножить на номер места цифры единиц от цифры 5.

А как возвести в квадрат число, если цифра единиц меньше 5. Например, 73^2 . Число $73 < 75$, значит, применяя приём возведения в квадрат для 75, квадрат числа 73 будет меньше.

$$73^2 = 5329;$$

$73^2 = 5609$ – применяя приём возведения в квадрат для числа, оканчивающегося на 5. Но $5329 \neq 5609$.

Решим уравнение: $73^2 = 5609 - x$

$$5329 = 5609 - x$$

$$x = 5609 - 5329$$

$x = 280$, где $280 = 70 \cdot 2 \cdot 2$, первая двойка удваивает число десятков в числе; вторая двойка обозначает номер места цифры 3 от цифры 5.

Эврика! Способ найден!

$$73^2 = 7 \cdot 8 \cdot 100 + 3 \cdot 3 - 70 \cdot 2 \cdot 2 = 5609 - 280 = 5329.$$

Можно оформить решение и так: $73^2 = 5609$

$7 \cdot 8 = 56$; $3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow 5609$	
$- \underline{28}$	$70 \cdot 2 \cdot 2 = 280$; это 28
5329	десятков, поэтому второе число можно подписать под первым, сдвинув его влево на одну цифру.

 Чтобы возвести любое двузначное число в квадрат, надо количество десятков умножить на следующее число и приписать квадрат числа единиц. К полученному результату прибавить (или из полученного результата вычесть) удвоенное произведение десятков числа, умноженное на порядковый номер места цифры единиц в числовом ряду $1_4, 2_3, 3_2, 4_1, \underline{5}, 6_1, 7_2, 8_3, 9_4$ от цифры 5.

➤ Если квадрат числа единиц является однозначным числом, то перед ним записать цифру нуль.

Какой приём возведения двузначного числа в квадрат наиболее простой? Для себя я выбрала два приёма. Мне они оба понятные и несложные.

$$1) 68^2 = 6^2 \cdot 100 + 8^2 + 60 \cdot 8 + 60 \cdot 8 = 3664 + 480 + 480 = 3664 + 960 = 4624.$$

$$2) 68^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 8^2 + 60 \cdot 2 \cdot 3 = 4264 + 360 = 4624.$$

Какой приём выберите вы, думайте сами. Вам решать.

Заключение.

Владение приёмами быстрого возведения двузначного числа в квадрат даёт возможность выбрать в каждом отдельном случае наиболее рациональные и эффективные пути вычислений, что приводит:

- к сокращению времени на вычисления;
- к защите от массы вычислительных ошибок;
- к ведению записи в строчку и отказа от традиционного письменного умножения.

Считаю, что возводить двузначные числа в квадрат легко и просто. Гипотеза доказана.

Умение считать в уме остаётся полезным навыком для современного человека, несмотря на то, что он владеет всевозможными устройствами, способными считать за него.

Возможность обходиться без калькулятора и в нужный момент оперативно решить поставленную арифметическую задачу – это здорово[1]!

Список литературы

1. Умножай с умом. Учебно-методическое пособие для учащихся общеобразовательных учреждений /Лаптева Т.П. – М.: Перо, 2017.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Диофант_Александрийский
3. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Геометрия_\(Декарт\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Геометрия_(Декарт))
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Лейбниц,_Готфрид_Вильгельм
5. <https://mirurokov.ru/открытый-урок/возведение-в-степень/история-возникновения-степени-числа.html>