О НЕКОТОРЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ И ИХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ И ЛИНИЯХ, КОТОРЫХ НЕ ВСТРЕТИШЬ В ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКАХ

предмет: Математика

Авторы: Кирюшина Яна и Кудряшева Дарья,
10 социально-гуманитарный класс
ГБОУ «Брянский городской лицей №1 имени А.С. Пушкина»
Руководитель: Ефремова Любовь Ивановна, учитель математики
ГБОУ «Брянский городской лицей №1 имени А.С. Пушкина»

Введение

«Вдохновение нужно в поэзии,
как и в геометрии»
А.С. Пушкин

Изучая произведение А.С. Пушкина «Каменный гость», в 9-ом классе, мы обратили внимание на то, что в нем неоднократно упоминаются геометрические фигуры, например, ***треугольник.***

«И кровь нейдет из треугольной ранки…»

Вернемся к геометрии. Математики называют треугольник двумерным симплексом. «Симплекс» - по латыни означает простейший. Трёхмерным симплексом называют треугольную пирамиду. Именно в силу своей простоты треугольник является основой многих измерений. Треугольник всегда имел широкое применение в практической жизни. Так, в строительном искусстве испокон веков используется *свойство жесткости треугольника* для укрепления различных строений и их деталей. Изображение треугольников и задачи на треугольники встречаются в папирусах, в старинных индийских книгах и других древних документах. Благодаря своей универсальности математика стала использоваться в естественных, гуманитарных науках и во всех сферах жизни человека [7].

И несмотря на то, что мы учимся в социально-гуманитарном классе, мы все-таки хотим расширить свои знания, особенно про свойства треугольника, которые могут пригодиться нам при сдаче ОГЭ и при подготовке к математическим олимпиадам, в которых мы тоже участвуем.

В прошлом учебном году мы работали над проектом, связанным с вневписанными окружностями и хотели как-то косвенно продолжить изучение этой темы. Поэтому мы решили остановиться на треугольниках, которые не входят в школьную программу и их замечательных точках и линиях. Ведь недаром А.С. Пушкин, чьё имя носит наше учебное заведение, прибегал в художественных произведениях к треугольнику, как источнику вдохновения. Итак, о простом и неисчерпаемом треугольнике…

Объект исследования: треугольники Жергона и Нагеля.

Предмет исследования: замечательные точки и линии в треугольнике.

Цель проекта: изучение и обобщение знаний о треугольниках за страницами учебника.

Задачи:

- изучить теоретический материал по теме: «О некоторых треугольниках и их замечательных точках и линиях, которых не встретишь в школьных учебниках»;
- повторить замечательные точки в треугольнике за школьный курс геометрии;
- расширить кругозор знаний по геометрии по замечательным точкам и линиям в треугольнике;
- научиться применять данные теоретические знания при решении задач планиметрии
- подготовить подборку задач для элективного курса по данной теме;
- создать буклет, как справочное пособие по данной теме;
- выпустить брошюру для элективного курса по математике «Замечательные линии и точки в треугольнике».

Мы выдвигаем **гипотезу**, что желание изучать и применять неизвестные теоремы при решении задач, может способствовать развитию интереса к геометрии, как науке.

Основная часть

Четыре замечательные точки треугольника, изучаемые в школе.

Переходя к основной части работы, мы начнём с замечательных точек треугольника. К числу таких точек, изучаемых в школьном курсе геометрии, относятся: рис.1(а,б,в,г) [1].

Рис.1(а), точка пересечения медиан, О – центр тяжести (*барицентр)*

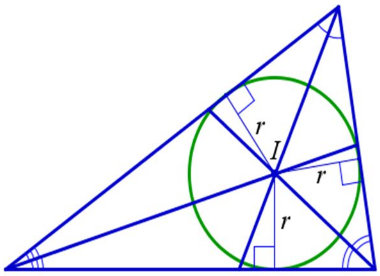


Рис. 1(б), точка пересечения биссектрис, I- центр вписанной окружности *(инцентр)*

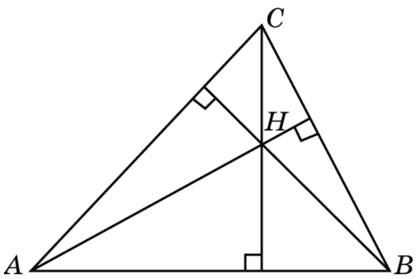


Рис. 1(в), точка пересечения высот

H – ортоцентр

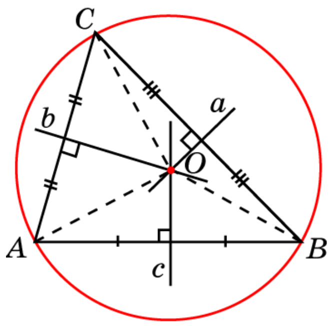


рис.1(г), точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника
О - центр описанной окружности.

На эти четыре точки было обращено особое внимание, и, начиная с XVIII века, они были названы **«замечательными»** или **«особенными» точками треугольника**.

Формулировки теорем Чевы и Менелая

Начало открытий замечательных точек треугольника, не изучаемых в школе, положил в 17 веке Джованни Чева (Ceva) (1648 - 1734) – итальянский математик. Основной заслугой Чевы является построение учения о секущих, которое положило начало новой – синтетической геометрии; оно изложено в сочинении "О взаимнопересекающихся прямых". Его теорема позволила открыть свойства замечательных точек треугольника, известных как точки Нагеля и Жергона [4].

Определение: отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне или ее продолжении, называется чевианой (Рис.2) [4].

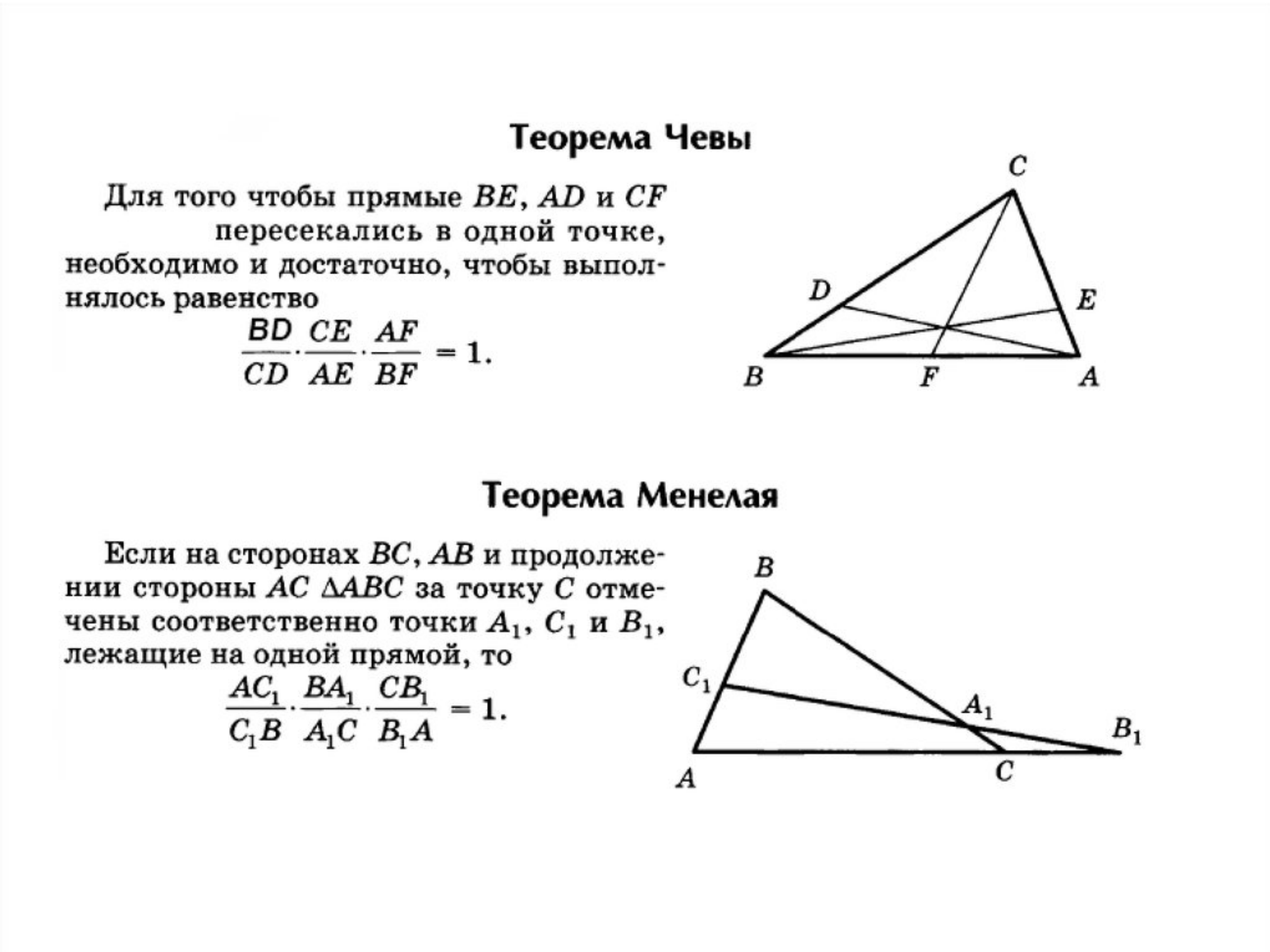
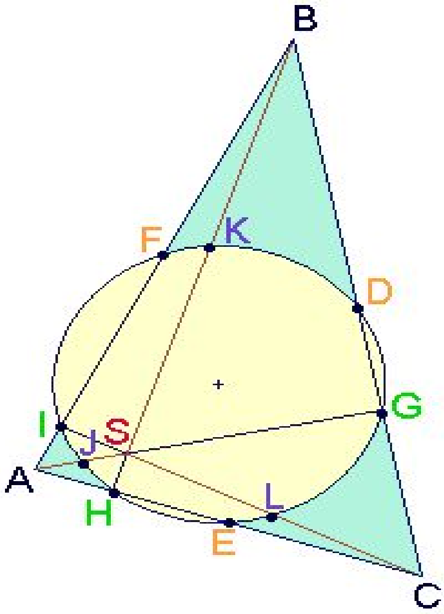


Рис. 2. Теорема Чевы и теорема Менелая

Прямая и окружность Эйлера [2]

Прямая Эйлера.

В 1765 году Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой, названной позже «прямой



Эйлера» (Рис.3).

Рис. 3. Прямая и окружность Эйлера

Окружность Эйлера[2]

Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности. Эта окружность называется окружностью девяти точек или окружностью Эйлера (Рис.3).

Свойство точек Жергонна и Нагеля [3]

Определение. *Точкой* ***Жергонна*** *называется точка пересечения отрезков, которые соединяют вершины треугольника с точками касания сторон, противоположных этим вершинам, и вписанной в треугольник окружности.*
Пусть точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника BC, AC и AB в точках D, E и F соответственно. Точка Жергонна — это точка пересечения отрезков AD, BE и CF.

Докажем, что эти три отрезка действительно пересекаются в одной точке. Заметим, что центр вписанной окружности — это точка пересечения биссектрис углов треугольника ABC, а радиусы вписанной окружности ID, IE и IF перпендикулярны сторонам треугольника. Тем самым, имеем
три пары равных треугольников.
Произведения AF·BD·CE и AE·BE·CF равны, поскольку
BF=BD,CD=CE,AE=AF
следовательно, отношение этих произведений равно 1, и по теореме Чевы,

отрезки пересекаются в одной точке.

Определение и свойство точки Нагеля [3]

Точка Нагеля — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями.

- *Точка Нагеля* лежит на одной прямой с инцентром и центроидом, при этом центроид делит отрезок между точкой Нагеля и инцентром в отношении 2:1. Эта прямая
называется **прямой Эйлера.**

- Если точки $T_A \in BC, T_B \in CA, T_C \in AB$ таковы, что каждый из отрезков AT_A, BT_B и CT_C делит периметр треугольника пополам, то эти отрезки пересекаются в одной точке — точке Нагеля.

Треугольник Жергонна (для треугольника ABC) определяется тремя точками касания вписанной окружности на трёх сторонах. Эти вершины обозначим T_A, T_B и T_C. Точка T_A лежит напротив вершины A, точка T_B напротив вершины B, точка T_C напротив вершины C. Этот треугольник Жергонна $T_A T_B T_C$ известен также, как **треугольник касаний** треугольника ABC (Рис.4).

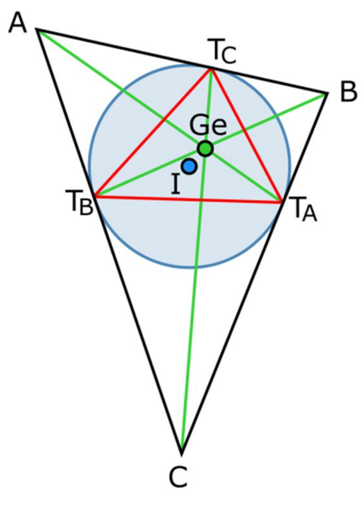


Рис. 4. Треугольник Жергонна

Свойства:

- Три прямые AT_A, BT_B и CT_C пересекаются в одной точке – точке Жергонна.
- Точка Жергонна треугольника является точкой пересечения симедиан

треугольника Жергонна.

Пусть, точки касания вписанной в данный треугольник окружности соединены отрезками, тогда получится треугольник Жергонна, и в полученном треугольнике проведены высоты. В этом случае прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника. Следовательно, *ортотреугольник* треугольника Жергонна и исходный треугольник подобны.

Теорема Жергонна. Пусть три чевианы АД, BE и CF пересекаются в точке K внутри треугольника ABC. Тогда выполняются следующие равенства:

1) $\frac{\mathbf{KD}}{\mathbf{AD}}+\frac{\mathbf{KE}}{\mathbf{BE}}+\frac{\mathbf{KF}}{\mathbf{CF}}=\mathbf{1}$

2) $\frac{\mathbf{AK}}{\mathbf{AD}}+\frac{\mathbf{BK}}{\mathbf{BE}}+\frac{\mathbf{CK}}{\mathbf{CF}}=\mathbf{2}$

Доказательство. Поскольку выполняются очевидные равенства

$\frac{AK}{AD}+\frac{KD}{AD}=\mathbf{1},\frac{BK}{BE}+\frac{KE}{BE}=\mathbf{1},\frac{CK}{CF}+\frac{KF}{CF}=\mathbf{1}$

то равенства **1)** и **2)** эквивалентны. Докажем первое из них.

Рассмотрим отношения площадей треугольников

$$\frac{S(\Delta BKC)}{S(\Delta ABC)}=\frac{KD}{AD},\frac{S(\Delta AKC)}{S(\Delta ABC)}=\frac{KE}{BE},\frac{S(\Delta AKB)}{S(\Delta ABC)}=\frac{KF}{CF}$$

Здесь мы используем тот факт, что отношения площадей треугольников, имеющих общую сторону, равны отношениям их высот. Соответственно, отношение высот будет равно отношению длин параллельных отрезков, проведенных к общей стороне из противоположной вершины.

Теперь сложим отношения площадей:

$\frac{KD}{AD}+\frac{KE}{BE}+\frac{KF}{CF}=\frac{S(\Delta BKC)+S(\Delta AKC)+S(\Delta AKB)}{S(\Delta ABC)}=1$

Треугольник Нагеля [3]

Треугольник Нагеля для треугольника ABC определяется вершинами T_A, T_B и T_C, которые являются точками касания вневписанных окружностей треугольника ABC и точка T_A противоположна стороне AB, и т. д. (рис.5).

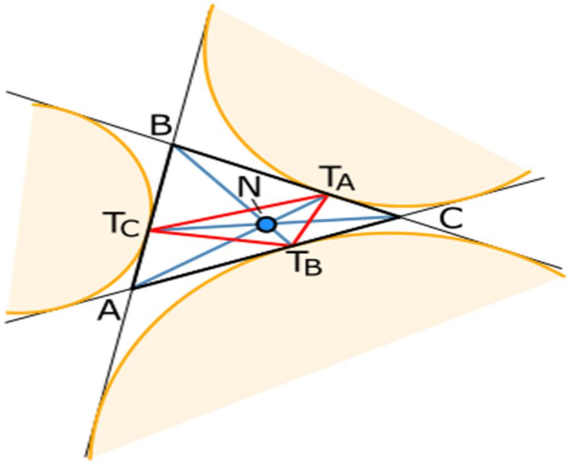


Рис. 5. Треугольник Нагеля

Свойства: описанная вокруг треугольника T_A,T_B,T_C ,окружность называется **окружностью Мандарта** (частный случай эллипса Мандарта)

- Три прямые AT_A, BT_B и CT_C делят периметр пополам и пересекаются в одной точке Нагеля.

Основные геометрические характеристики:

1) Если ширина треугольника Рёло равна a, то его площадь равна:
$S = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$

2) Периметр: $P = \pi a$

3) Радиус вписанной окружности: $r = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) a$

4) Радиус описанной окружности: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Построение:

Треугольник Рёло можно построить с помощью одного только циркуля, не прибегая к линейке. Это построение сводится к последовательному проведению трёх равных окружностей. Центр первой выбирется произвольно, центром второй может быть любая точка первой окружности, а центром третьей — любая из двух точек пересечения первых двух

Заключение

Для написания своей работы мы рассмотрели много теоретического материала.

Исследовали точки Жергонна и Нагеля, а также их треугольники и получили новые знания, использовал их при решении задач. Работая над темой, мы поняли, что, несмотря на то, что треугольник называют простейшей фигурой, он скрывает в себе еще много тайн, которые предстоит разгадать ученым.

Слова Жергонна о математических теориях: «Нельзя хвастаться тем, что ты сказал последнее слово в какой-либо теории, если не можешь объяснить ее несколькими словами первому встречному на улице» [2].

Обобщая всё вышесказанное, можем уверенно отметить, что сформулированная нами гипотеза, полностью подтверждена. Для нас решение задачи с использованием новых теорем и свойств доставляет огромное удовольствие. Тем более, что умение самостоятельно изучать дополнительный теоретический материал, обобщать и применять при решении задач поможет нам в дальнейшем.

Теоретический и практический материал мы постаралась изложить в работе так, чтобы она была легка в изучении, как учителю, так и ученику. А задачи, выбранные нами из учебника «Геометрия 7-9» под редакцией Атанасяна Л.С и задачников по геометрии, помогут в закреплении этой темы. Теоремы Чевы и Менелая казались сложными и непонятными на первый взгляд, но они оказались простыми и интересными. Теоремы Чевы и Менелая находят применение в задачах, в которых присутствуют секущие прямые. Они не изучаются в курсе 7-9 классов. Но решение с помощью теорем Чевы и Менелая более рационально, чем решение другими способами.

Мы считаем, что теоремы Чевы и Менелая должны быть включены в курс 7-9 классов, потому что они расширяют кругозор ученика, дают возможность решать задачи просто и легко. Исследование, проведенное нами, поможет хорошо сдать экзамены.

Знакомство с геометрическими фигурами, изучение которых не входит в рамки школьной программы, позволяет приобрести новые знания и иначе посмотреть на знакомые предметы.

Цель работы достигнута, и задачи решены, для успешной сдачи экзамена по геометрии сделан огромный шаг вперёд. Мы продолжим работать над этой темой и поучимся решать задачи на замечательные точки треугольника.

Список источников информации

1.Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. «Геометрия 7-9», Москва, «Просвещение», 2015. -383 с.:ил.

2. Н.Б. Бирюкова. Логическая мысль во Франции XVII- начала XIX столетий: Французские предвосхищения идей математической логики. М., 2006. С.150-159 и др.

3. И.Вебер, И.Вайштейн . Энциклопедия элементарной геометрии (Книга 2)

4. А.Г.Мякишев. Элементы геометрии треугольника. Серия: «Библиотека "Математическое просвещение"». М.:МЦНМО,2002. с. 11, п. 5.

5. К.А. Рыбников. Возникновение и развитие математической науки: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 159 с.: ил.

6.Энциклопедия. Мудрость тысячелетий. – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2004.

7.Сайт http://ru.wikipedia.org/wiki.