Научно-исследовательская работа

Математика

«Аликвотные дроби при решении нестандартных задач»

Выполнила:

Животова Алина Денисовна

Учащаяся 6 «Б» класса

МБОУ «Гимназии №41»

Руководитель:

Ломонова Ольга Александровна

учитель математики

МБОУ «Гимназии №41»

Введение

Тема «Аликвотные дроби при решении нестандартных задач» является интересной темой для исследования дробей. Столкнувшись с этим термином впервые, понимаешь, почему в Древнем Египте математики «настоящими» дробями считали только аликвотные дроби.

Цель исследования:

- Выяснить, какое значение имеют аликвотные дроби в нашей жизни.

Задачи исследования:

- Узнать происхождение аликвотных дробей.
- Рассмотреть основные операции с аликвотными дробями.
- Решать олимпиадные задачи с помощью аликвотных дробей.
- Составлять и решать задачи практического содержания.

Основная часть

История аликвотных дробей

Аликвота - (лат. aliquoties, «несколько раз или несколько частей»)

Аликвотная дробь- дробь, числитель которой равен единице.

Аликвотные дроби начали использоваться ещё в древности. Необходимость в дробных числах возникла в результате практической деятельности человека. Потребность в нахождении долей единицы появилась у наших предков при дележе добычи после охоты. Второй существенной причиной появления дробных чисел следует считать измерение величин при помощи выбранной единицы измерения. [8]

Первые дроби, с которыми нас знакомит история, это дроби вида – 1/2, 1/3, 1/4 – так называемые **единичные** дроби, так как числитель этих дробей единица. Причиной появления этих дробей являлась необходимость разбить единицу на доли. Это нужно было для того:

1. чтобы разделить добычу после охоты, ведь, нужно было знать, сколько частей составляет целое и кому какая часть добычи станет принадлежать.

2. выразить результат измерения длины, времени, площади, массы и вести расчеты за товары

Аликвотные дроби в Древнем Египте

Аликвотные дроби появились раньше других дробей. В Древнем Египте математики «настоящими» считали только аликвотные дроби вида **1/n.**

Итак, дроби вида **1/n,** где числитель 1, а n – натуральное число, (т.е. число, которое используется для счёта предметов), называются **аликвотными дробями** (от латинского aliguot-« несколько») или **единичными**.[2]

В Древнем Египте «настоящими», математики, считали только аликвотные дроби. Поэтому каждую дробь стремились представить в виде суммы меньших аликвотных дробей, причём с разными знаменателями.

Например: 8/15 =1/3+1/5,

1/2 = 1/3+1/6,

1/4 = 1/5+1/20,

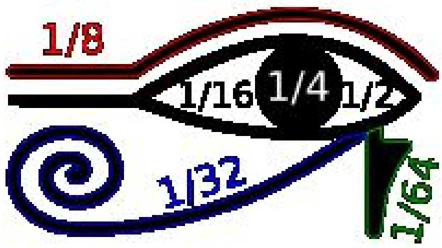
3/4 = 1/2+1/4,

2/11 = 1/6+1/66,

2/7 = 1/6+1/14+1/21,

2/13 = 1/8+1/52+1/104

Кроме того, для единиц измерения емкостей и объемов использовался так называемый **глаз «Хора»**



Он представлял собой дробь 63/64**.**

Так как, согласно мифам глаз Хора был выбит, а затем восстановлен на 63/64. Каждая часть глаза соответствовала определённой дроби и была представлена в виде суммы аликвотных дробей таким образом:

1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64=63/64

Аликвотные дроби встречаются в древнейших, дошедших до нас математических текстах, составленных более 5000 лет тому назад, – древнеегипетских папирусах и вавилонских клинописных табличках. Они нужны были для практических целей.[8]

Рассмотрим такую задачу: «Разделить 7 хлебов между 8 людьми» Если разрезать каждый хлеб на 8 частей, придется провести 49 разрезов (7 хлебов по 7 надрезов в каждом хлебе). А по-египетски эта задача решалась так:

7/8= 1/2+1/4+1/8

Значит, каждому человеку нужно дать половину хлеба, четверть хлеба и восьмушку хлеба. При этом, придется сделать почти в три раза меньше разрезов.

Значение аликвотных дробей в истории:

Первое понятие дроби появилось в Древнем Египте много веков назад. В русском языке это слово появилось лишь в 8 веке от слов «дробить, разбивать, ломать на части», поэтому в первых учебниках дроби называли «ломанными числами». Современное обозначение дробей берет свое начало в Древней Индии, а дробная черта появилась в записи дробей лишь 300 лет назад, до этого ставили точку между числителем и знаменателем. Сами названия «числитель» и « знаменатель» ввел в употребление греческий ученый - математик Максим Плануд. [2]

Долгое время дроби считались самым трудным разделом математики. У немцев даже сложилась поговорка «Попасть в дроби», что означало оказаться в трудном положении.

Формулы аликвотных дробей

Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Сюда относятся, прежде всего задачи, в которых требуется разделить какие-либо ресурсы на несколько частей с наименьшим количеством действий. Для этого необходимо представить какое-либо число в виде суммы аликвотных дробей.[1]

Например: 1/3 = 1/4+1/12,

1/5 = 1/6+1/30,

1/8 = 1/9+1/72

Из данных примеров следует, что знаменатель первой дроби на 1 больше знаменателя данной дроби. Произведение же знаменателя первой дроби и знаменателя данной дроби соответствует знаменателю второй дроби.

Где **n** – знаменатель данной дроби является натуральным числом, тогда мы можем представить формулу в таком виде как:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\,(n+1)}$$

Доказать это равенство можно, приведя дроби к общему знаменателю и после сокращений увидеть, что формула верна.

Кроме того, следует отметить, что аликвотные дроби можно как складывать, так и вычитать.

Поэтому, разложить в виде **суммы** двух аликвотных дробей можно по формуле**:**

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

Если преобразовать формулу $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\,(n+1)}$,

то получим следующие равенства:

$$\frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

Если разложить в виде **разности** двух аликвотных дробей по формуле**:** $\frac{1}{n(n+1)} =$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)},$$

то мы увидим, что аликвотную дробь можно представить разностью двух аликвотных дробей, знаменателями которых являются последовательные числа равные их произведению.

Так, например: 1/6 = 1/(2*3) = 1/2-1/3

1/2 = 1/(1*2) = 1/1 – 1/2

1/56 = 1/(7*8) = 1/7-1/8

Решение нестандартных задач

№1. Представить число 1 в виде сумм различных аликвотных дробей.[5]

а) трёх слагаемых:

1= 1/2+1/2=1/2+(1/3+1/6) = 1/2+1/3+1/6

б) четырёх слагаемых:

1=1/2+1/2=1/2+(1/3+1/6)=1/2+1/3+1/6=1/2+1/3+(1/7+1/42)=1/2+1/3+1/7+1/42

в) пяти слагаемых:

1= 1/2+1/2=1/2+(1/3+1/6)=1/2+(1/4+1/12)+(1/7+1/42)=1/2+1/4+1/12+1/7+1/42

г) шести слагаемых:

1=1/2+1/2=1/2+(1/3+1/6)=1/2+1/3+1/6=1/2+(1/4+1/12)+(1/7+1/42)=1/2+1/4+1/12 +((1/8+1/56)+1/42))=1/2+1/4+1/12+1/8+1/56+1/42

№2. Представьте дробь 1/2020 в виде аликвотных дробей.[7]

Существует 2 способа представления дроби 1/2020 в виде суммы и один из них - в виде разности аликвотных дробей.

Это, опять-таки, из-за простоты числа 2020.

1/2020=1/2020+1/4082420=1/4040+1/4040=1/2019-1/4078380

№3. Найти сумму аликвотных дробей[6]

1/2+1/((2*3))+1/((3*4))+1/((4*5))+⋯+1/((19*20))

Решение: воспользуемся формулой для разложения аликвотной дроби в виде разности

1/2=1/((1*2))=1/1-1/2;

1/6=1/((2*3))=1/2-1/3;

1/12=1/((3*4))=1/3-1/4 и т.д.

1/20=1/((4*5))=1/4-1/5;

1/380=1/((19*20))=1/19-1/20.

Подставив, уже разложенные выражения в сумму, получим:

1/1-1/2+1/2-1/3+1/3-1/4+…-1/19+1/19-1/20=1/1-1/20=19/20

1/2+1/((2*3))+1/((3*4))+1/((4*5))+⋯+1/((19*20))=19/20

Ответ: 19/20

№4. Найти сумму аликвотных дробей [6]

1/20+1/30+1/42+1/56+1/72+1/90+1/110+1/132

Решение: воспользуемся формулой для разложения аликвотной дроби в виде разности

1/20=1/(4*5)=1/4-1/5;

1/30=1/(5*6)=1/5-1/6;

1/42=1/(6*7)=1/6-1/7;

1/56=1/(7*8)=1/7-1/8;

1/72=1/(8*9)=1/8-1/9;

1/90=1/(9*10)=1/9-1/10;

1/110=1/(10*11)=1/10-1/11;

1/132=1/(11*12)=1/11-1/12

1/4-1/5+1/5-1/6+1/6-1/7+1/7-1/8+1/8-1/9+1/9-1/10+1/10-1/11+1/11-1/12=1/4-1/12=(3-1)/12=2/12=1/6 1/20+1/30+1/42+1/56+1/72+1/90+1/110+1/132=1/6

Ответ: 1/6

№5. Решить уравнение [4]

(1/(25*26)+1/(26*27)+1/(27*28)+1/(28*29)+1/(29*30))*150+1,03:[10,3*(x-1)]=11

Решение: упростим уравнение и найдем сумму аликвотных дробей:

1/(25*26)+1/(26*27)+1/(27*28)+1/(28*29)+1/(29*30)

Представим каждую дробь в виде разности аликвотных дробей

1/(25*26)=1/25-1/26; 1/(26*27)=1/26-1/27;

1/(27*28)=1/27-1/28;

1/(28*29)==1/28-1/29;

1/(29*30)=1/29-1/30;

$1/25-1/26+1/26-1/27+1/27-1/28+1/28-1/29+1/28-1/29+1/29-1/30=1/25-1/30==(6-5)/150=1/150$ $1/(25*26)+1/(26*27)+1/(27*28)+1/(28*29)+1/(29*30)=1/150$

После нахождения суммы, уравнение примет следующий вид

$1/150*150+1{,}03:[10{,}3(x-1)]=11$

$1+1{,}03:[10{,}3(x-1)]=11$

$1{,}03:[10{,}3(x-1)]=10$

$[10{,}3(x-1)]=1{,}03:10$

$10{,}3(x-1) = 0{,}103$

$x-1 = 0{,}01$

$x =1{,}01$

Ответ: 1,01

№6. Найти сумму[3]

$1/(10*11)+1/(11*12)+\ldots+1/(98*99)+1/(99*100)=?$

Чтобы найти решение данной задачи необходимо найти сумму

$1/(1*2)+1/(2*3)+\ldots+1/(98*99)+1/(99*100)=99/100$

И вычесть из нее сумму

$1/(1*2)+1/(2*3)+\ldots+1/(8*9)+1/(9*10)=9/10$

$99/100-9/10=(99-90)/100=9/100=0{,}09$

Заключение

Таким образом, при разработке данной темы, я узнала, что первыми дробями, которыми оперировали люди, были аликвотные дроби.

Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Аликвотные дроби используются тогда, когда требуется что-то разделить на несколько частей с наименьшим количеством действий для этого.

Разложение дробей на две аликвотные дроби систематизировали в виде формулы, преобразовав которую, легко решили олимпиадные задачи по математике разных лет.

Решив проблему разложения аликвотных дробей на две аликвотные дроби, мы пришли к выводу, что разложение на три, четыре, пять и т.д. аликвотных дробей можно произвести, разложив одно из слагаемых на две дроби, следующее слагаемое еще на две аликвотные дроби и т.д.

Поэтому решения задач с применением аликвотных дробей – это занимательный процесс, развивающий мышление и логику, который помогает решать нестандартные и олимпиадные задачи по математике разных лет.

Список использованных источников и литературы

1. Баженов И.И, А.Г.Порошкин А.Г. и др. Задачи для школьных математических кружков. - Сыктывкар, 1994.
2. Бородин А.И. Из истории арифметики, Головное издательство «Ваша школа» - К., 1986
3. Гаврилова Т.Д. Занимательная математика, 5-11классы. - Волгоград: Учитель, 2008.
4. Левитас Г.Г. Нестандартные задачи по математике. - М.: ИЛЕКСА, 2007.
5. Петерсон Л. Г. Математика, 5класс. – М.:Ювента, 2016.
6. Фарков А. В. Математические олимпиады в школе, 5-11классы. – М.: Айрис-пресс, 2012.
7. Фарков А.В. Математические олимпиады 5-6 классы.- М: Издательство «Экзамен». – М.:2019
8. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего школьного возраста, М.: Педагогика,1989.