Научно-исследовательская работа

МАТЕМАТИКА (геометрия)

Тема работы

«Многомерность пространства»

Выполнил:

Ларионов Александр Владимирович

учащийся 8 «А» класса

МАОУ Одинцовского лицея №6 им. А.С. Пушкина

Руководитель:

Пилипенко Галина Ивановна

учитель математики

МАОУ Одинцовского лицея №6 им. А.С. Пушкина,

Введение

С раннего детства меня интересовали самолеты, их устройство и все, что с ними связано. Изучение технической литературы, занятия в кружке авиа моделирования, собственные эксперименты, привели меня к этой работе.

1. **Предметная область**

Геометрия

2. **Разработанность исследуемой проблемы**

А. Эйнштейн создал Теорию Относительности в многомерности, тем самым, внес вклад в изучение многомерных пространств. Так же, математик Р. Декарт создал систему координат – «жизненно» необходимую для изучения пространства. Так же была создана теория Пуанкаре, которая была доказана полностью лишь в 2002 году. Так же, существует теория Калуцы – Клейна[*1*], вкратце, описанная здесь.

3. **Цель работы**

Исследование измерений в геометрии, решение геометрических задач. Изучение теорий. Расширение кругозора учащихся, путем толкования темы максимально доступным языком.

4. **Актуальность**

Работа нацелена рассказать о теориях многомерного пространства, показать, как решаются нестандартные задачи по геометрии, с применением элементов алгебры 7-8 класса школьной программы. Далее описываемый материал не включен в общеобразовательный комплекс геометрии средней и старшей школы.

5. **Методы**

Поиск и изучение источников информации, изучение и задач, их решение и методы решения. Решение некоторых задач на нахождение гиперобъема (тессеракт, пентаракт, гексеракт и т.д; симплекс) и на вычисление гипердиагонали геперкубов.

Определения

В этой работе будут использоваться специальные для этой темы обозначения. Обозначения приведены ниже с толкованием.

Гиперобъем **–** некоторая величина, обозначающая «внутренность» гипертел. Вычисляется по формуле $V_N = a^N$, где N – мерность пространства. В конце решения задачи ставится метрическая единица длины с индексом N. пример: $V_N = 279936\text{см}^7$ (показано на примере вычисления гиперобъема гиперкуба $7^{\text{ой}}$ мерности пространства, хептеракт)

Мерность пространства – или ***«Размерность пространства»***, бытовое название «измерение». [*4*] Количество независимых параметров, нужных для описания состояния объекта. К примеру, в $3^{\text{х}}$ мерном пространстве, для описания , к примеру, куба, нам необходимо 3 величины: x – длина, y – высота и z – ширина. По тому же самому алгоритму выполняются описания гипертел уже в других мерностях, то есть в $4^{\text{ой}}$ мерности будет 4 величины и так далее.

Гиперкуб – куб N – мерности. Префикс «гипер» добавляется ко всем многомерным аналогам $3^{\text{х}}$ мерных тел.

Гипердиагональ Гиперкуба – Диагональ между 2 вершинами гиперкуба. Находится по формуле $L_N = a\sqrt{N}$ (по аналогии с формулой диагонали квадрата).

Политоп – Подмножество Евклидова пространства, представляющее из себя конечное число симплексов.

Гипервысота – высота от основания гипертела. Обычно применяется при решении задач с *симплексами*.

Теория

Мы живем в трехмерном пространстве. Наши приборы не могут фиксировать наличие высших измерений. Это пытается объяснить теория

Калуцы−Клейна: высшие размерности имеют замкнутую топологию, поэтому они никак не проявляют себя в обычных условиях.

В данной работе описывается *теория размерности.* Далее приведены некоторые аспекты данной теории, необходимые для этой исследовательской работы.

Начнем с описания каждого из измерений, вплоть до 4, так как условно принято писать номер измерения как ND, где N – мерность пространства. (D. – *сокращ.* от англ. «измерение»)

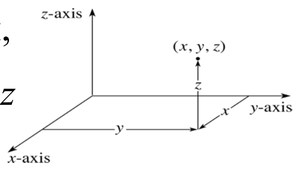
0D – измерение в пространстве, не имеющее величин. Пример 0-мерного тела – точка.

1D – измерение в пространстве, имеющее только величину x – длина. Примером послужит прямая. В этом измерении мы можем, условно, измерить длину прямой, если отложить на ней отрезок.

2D – измерение в пространстве, с двумя величинами, которые принято обозначать как x и y. где x – длина, y – высота. В этом измерении существует, так называемая, *Система координат* – некий комплекс определений, использующий метод координат для определения положения точки или множества точек или тела в пространстве с помощью символов или чисел.

Система координат была открыта французским философом и математиком *Рене Декартом*.

Примером для двухмерного пространства служит, к примеру, квадрат, а так же еще огромное множество двухмерных фигур. Мы можем найти, к примеру, площадь квадрата, по формуле $S = a^2$. Так же существует еще множество формул, применимых к остальным фигурам.

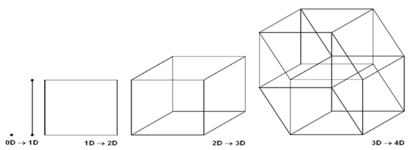


3D – измерение в пространстве, имеющее три величины, которые обозначают как *x, y, z.* Где x – длина, y – высота, z – ширина. В этом измерении, как и в предыдущем, есть система координат, в которой присутствует, помимо длины и высоты, еще ширина. Примером может послужить куб. Мы можем найти объем куба по формуле $V = a^3$. Так же существует множество формул по нахождению объема. 4D – измерение в пространстве, имеющее четыре величины, которые обозначают как *x, y, z, ω*. Где x – длина, y – высота, z –ширина, $\omega -$время. Последняя переменная обусловлена тем, что *гипертела (см. Определения)* напрямую связаны со временем, так как гипертело имеет свойство вращаться и проходить своими гранями сквозь себя. Примером четырехмерного гипертела можно считать тессеракт, симплекс и много других аналогов $3^{х}$ мерных фигур. Можем найти *Гиперобъем тела (см. Определения).* Вычислим его по формуле $V_N = a^N$, где N – мерность пространства.

•*Примечание*

Заметим, что все формулы, присущие каждому из измерений, имеют аналоги в предыдущем измерении, кроме первого измерения, т.к в нулевом измерении нет формул на нахождение какого – либо параметра точки, как таковых.

Измерения старше $4^{го}$ описывать не стоит, так как очень проблематично описать точку или гипертело в пространстве.



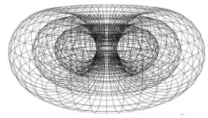
Точка, отрезок, квадрат, куб, тессеракт - соответсвенно.

Частные случаи

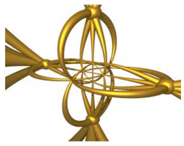
Тессеракт – Четырехмерый гиперкуб, аналог куба.

Симплекс – Обобщенное название n-мерного тетраэдра.

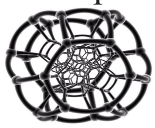
Гипертор – Многомерный аналог тора (*тор* – поверхность вращения, получаемая при вращении образующей окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, не пересекая ось)



Хептеракт (Гептеракт) – $7^{\text{ми}}$ мерный гиперкуб. *5-Ортоплекс (Пентакросс, триаконтадитерон)* – правильный политоп. Проще говоря, $5^{\text{ти}}$ мерная гиперпирамида из 16 ячеек.



Кросс-политоп – аналог $2^{\text{х}}$ мерного квадрата. Правильный политоп, двойственный n – мерному гиперкубу.



Гиперкубы

Гиперкубы – фигуры, аналогичные трехмерному кубу [3]. Обобщенное понятие на случай с n – количеством мерностей. Существует 6 известных многомерных кубов: *Тессеракт, Пентеракт, Хексеракт, Хептеракт, Октеракт, Эннеракт, Декеракт.*

Гиперобъем гиперкуба находится по формуле $V_n = a^n$.

Найдем гипердиагональ по формуле $L_N = a\sqrt{N}$.

Гиперкуб можно описать гиперсферой и вписать в него гиперсферу. радиус описанной Гиперсферы $R = \frac{a\sqrt{N}}{2}$.

Радиус вписанной Гиперсферы находится по формуле $r = \frac{a}{2}$.

Все эти формулы применимы к кубам любой мерности.

Гиперкуб N – мерности удовлетворяет неравентсву $\forall i{:} -\frac{a}{2} < x_i < \frac{a}{2}$, где а-длина ребра.

Задачи (часть 1)

Задача №1

Дан Гиперкуб $7^{\text{ой}}$ мерности. Найдите его гиперобъем, при условии, что длина ребра равна 3.

Решение:

Дано:	Вычисления
a = 3;	$V_n = 3^7$
n = 7	$V_n = 2187$
V_n - ?	

Ответ: 2187

Задача №2

Дан Эннеракт с Гиперобъемом равным 512 см^9. Найдите длину ребра.

Решение:

Дано:	Вычисления
V_n = 512 см^9;	$a = \sqrt[9]{512}$
n = 9	$a = 2$
a - ?	

Ответ: 2 см

Задача № 3

Дан Тессеракт и гиперсфера, соответсвующей мерности. Длина ребра является отношением $\frac{2}{x} = \frac{4}{6}$. Найдите радиус описанной гиперсферы.

Решение:

Дано:	Вычисления
a - $\frac{2}{x} = \frac{4}{6}$;	$a = x \times 4 = 6 \times 2$
n = 4	$4x = 12$
R - ?	$x = 3$ => $a = 3$

R= $\frac{3\sqrt{4}}{2}$ => R = 3.

Ответ: 3 см.

Задача №4

Дан Пентеракт. Найдите гипердиагональ, при условии, что длина ребра 7.

Решение:

Дано:	Вычисления
a = 7	$L_n = 7\sqrt{5}$
n = 5	$\sqrt{5} \approx 2{,}236068$ =>
L_n - ?	$L_n \approx 15{,}625476$

Ответ: ~15,625476

Симплексы

Симплекс – (от лат. «simplex» - простой). [2].Обобщенное название n-мерного треугольника. В геометрии, для простого понимания, перед слом «симплекс» ставится число мерности. Например, *3-симплекс (тетраэдр)* и так далее. По формуле, можем найти гиперобъем n-симплекса с единичной стороной: $V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n! \times 2n^{n/2}}$. Так же существует формула гиперобъема симплекса для стороны с любым значением $a,$ где $a > 0$. $V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$

Так же мы можем найти гипервысоту по формуле $H_n = a\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$, где n – мерность пространства.

Можем найти косинус двугранного угла по формуле $\cos\alpha = \frac{1}{n}$.

Задачи (часть 2)

Задача №1

Дан 4-симплекс с единичной стороной. Найдите гиперобъем этого симплекса.

Решение:

Дано:	Вычисления

n = 4 $V_n = \frac{\sqrt{4+1}}{4!\times2\times4^{4/2}}$ => $V_n = \frac{2,236}{768}$ = 0,0029114

V_n - ?

Ответ: 0, 002911 см^4

Задача №2

Дан 4-симплекс со стороной 3 см. Найдите гиперобъем этого симплекса

Решение

Дано:	Вычисления
n = 4	$V_n = \frac{27}{24}\sqrt{\frac{5}{8}}$ =1,125×(~0,7905) ≈ 1
a = 3см	
V_n - ?	

Ответ: ~1см^4

Задача №3

Дан 9-симплекс со стороной 4см. Найдите гипервысоту этого симплекса.

Решение:

Дано:	Вычисление
n = 9	$H_n = 3\sqrt{\frac{9+1}{18}} = 3 \times \frac{3,162}{4,242}$ ≈2,236
a = 4см	
H_n - ?	

Ответ: ~2,236 см^9

Заключение.

Применение на практике

Мы знаем, что функция – это зависимость результата только от одного параметра. Если же что-то описывается более чем одним параметром, то оно описывается геометрически точками, линиями, фигурами, поверхностями в многомерных пространствах. Геометрия многомерных пространств – широко применяемый математический аппарат для наглядного представления, исследования и прогнозирования большинства реальных процессов. Тем более, изучение этой темы необходимо еще и для изучения квантовой механики и физики, согласно теории Розенфельда, гласящей о том, что квантовая механика и физика невозможна без применения множества различных пространств.

Список литературы и интернет ресурсов

1. ru.wikipedia.org, статья «Теория Калуцы –Клейна».

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%9A%D0%B0%D0%BB%D1%83%D1%86%D1%8B_%E2%80%94_%D0%9A%D0%BB%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0

2. ru.wikipedia.org, статья «Симплекс».
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81

3. ru.wikipedia.org, статья «Гиперкуб».

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%BA%D1%83%D0%B1

4. ru.wikipedia.org, статья «Размерность пространства».

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0

5. Александров П.С. Комбинаторная топология. 1947, с. 660.

6. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. 1973. с. 576

7. Понтрягин П.С. Основы комбинаторной топологии. 1947. с. 142

8. R. Blei Analysis in integer and fractional dimensions. 2003. p. 556