Сюрпризы биссектрисы треугольника

Долгобородов С. В.

математика

11 класс, МАОУ «СОШ № 24», г. Северодвинск, Архангельская область

Научный руководитель: Паршева В.В., МАОУ «СОШ № 24», г. Северодвинск, Архангельская область

Введение

Актуальность исследования заключается в том, что в работе рассматриваются такие свойства биссектрисы треугольника, о которых в школьных учебниках даже не упоминается, но они вызывают интерес и значительно упрощают решение некоторых задач.

Цель работы: установление свойств биссектрисы угла треугольника, которые не изучаются в школе, но применяются при решении задач по геометрии и облегчают их решение.

Задачи исследования:

1) проанализировать информацию о свойствах биссектрисы треугольника из различных источников информации;

2) обобщить свойства биссектрисы угла и биссектрисы угла треугольника, которые изучаются в школьном курсе геометрии;

3) привести примеры их применения при решении задач по математике;

4) доказать малоизвестное свойство биссектрисы угла треугольника – лемму о дважды биссектрисе;

5) исследовать лемму о дважды биссектрисе для остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников;

6) найти и решить задачи на применение леммы о дважды биссектрисе треугольника;

7) установить наличие других малоизвестных свойств биссектрисы треугольника.

Предмет исследования: малоизвестные свойства биссектрисы треугольника.

Гипотеза: в ходе выполнения работы будут найдены свойства биссектрисы угла треугольника, которые помогут при решении задач.

В учебной литературе вопрос о свойствах биссектрисы угла треугольника освещён в недостаточной мере для решения задач. Для раскрытия темы работы было проведено моделирование леммы о дважды биссектрисе и задач, проведён эксперимент «Исследование леммы о дважды биссектрисе в остроугольном, прямоугольном и тупоугольном треугольниках».

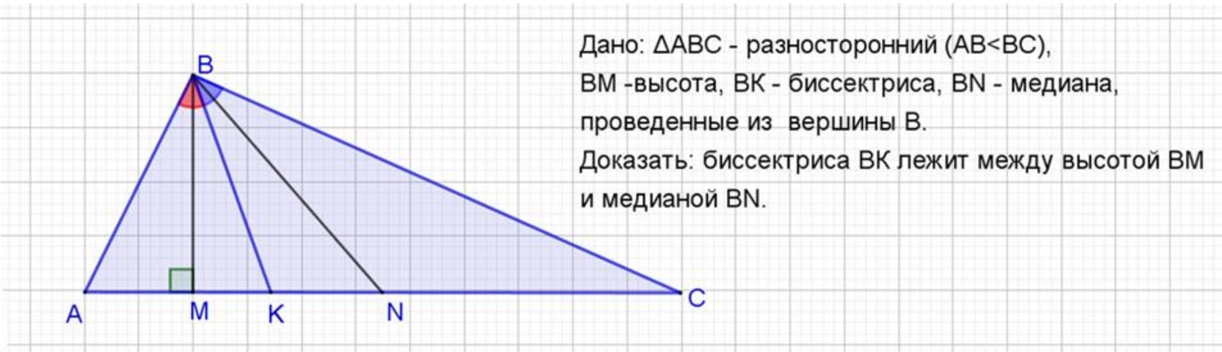
Методы исследования: анализ учебников, справочной математической литературы, построения с помощью циркуля и линейки, компьютерное моделирование математических объектов с помощью ИГС GeoGebra, анализ, сравнение, сопоставление и обобщение объектов, полученных в результате моделирования, обобщение найденных с помощью компьютерного моделирования закономерностей, проверка выдвинутых гипотез, аналитические рассуждения.

Основная часть

В геометрии существует огромное количество интересных фактов о различных элементах. Одним из этих элементов в треугольнике является биссектриса. На протяжении многих веков математики находили свойства, связанные с ней, однако некоторым из них не уделяется внимание в учебниках [1].

Знакомство с тетрадью с печатной основой «Бенефис биссектрисы внутреннего угла треугольника», созданной учениками нашей школы на занятиях элективного курса по геометрии в 2014 году, вызвало интерес у автора работы, поскольку одно свойство доказывалось 11 разными способами [2]. *Это можно назвать первым неожиданным сюрпризом биссектрисы угла треугольника.*

Особое внимание автор обратил внимание на задачу, в которой говорится об интересном свойстве биссектрисы угла треугольника:



Доказательство: AK + KC = AC. KC > $\frac{1}{2}$AC. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$. AB < BC, тогда AK < KC. Значит, AK < $\frac{1}{2}$AC. Точка K лежит между точками A и N. В ΔABK точка M лежит между точками A и K. Тогда точка K лежит между точками M и N.

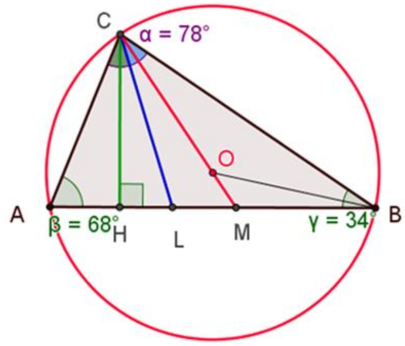
Значит, биссектриса лежит между высотой и медианой, проведенных из той же вершины треугольника. *Это стало для автора вторым сюрпризом биссектрисы треугольника.*

После доказательства было проведено моделирование в ИГС Geogebra для различных видов треугольника и было установлено, что данное свойство справедливо для любого разностороннего треугольника.

Лемма о дважды биссектрисе

Следующее свойство было получено во время решения задачи, предложенной научным руководителем.

Задача. В остроугольном ΔABC из вершины C проведены высота, биссектриса и отрезок, проходящий через центр описанной окружности до пересечения с противоположной стороной. Углы A и B равны соответственно 68˚и 34˚. Сравнить углы HCL, LCM и HCM.



Решение. ΔACB – ∠C = 180˚ – (∠A + ∠B) = 78˚;

ΔACH, ∠H = 90˚, ∠A = 68˚; ∠ACH = ∠H – ∠A = 22˚;

ΔACL, CL – биссектриса ∠ACB, ∠ACL = $\frac{\angle ACB}{2}$ = 39˚.

∠HCL = ∠ACL – ∠ACH = 39˚ – 22˚ = 17˚.

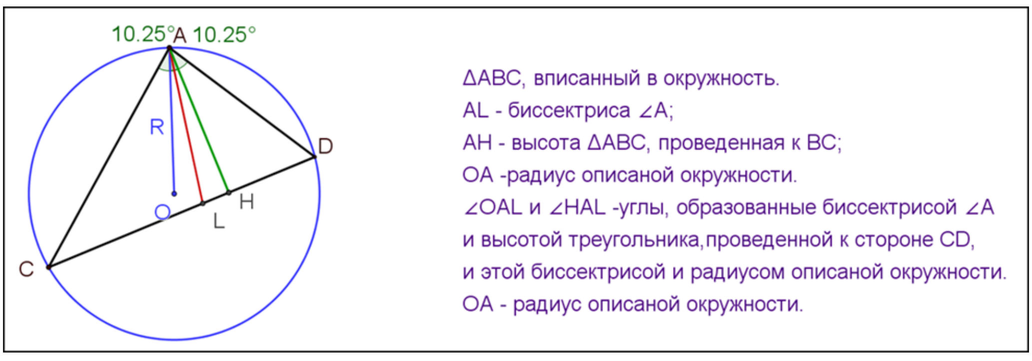
∠COB – центральный угол, ∠CAB – вписанный угол, которые опираются на одну и ту же дугу. ∠COB = 2∠CAB = 68˚ × 2 = 136˚, ΔCOB – равнобедренный, ∠OCB = $\frac{180° - \angle COB}{2}$ = 22˚.

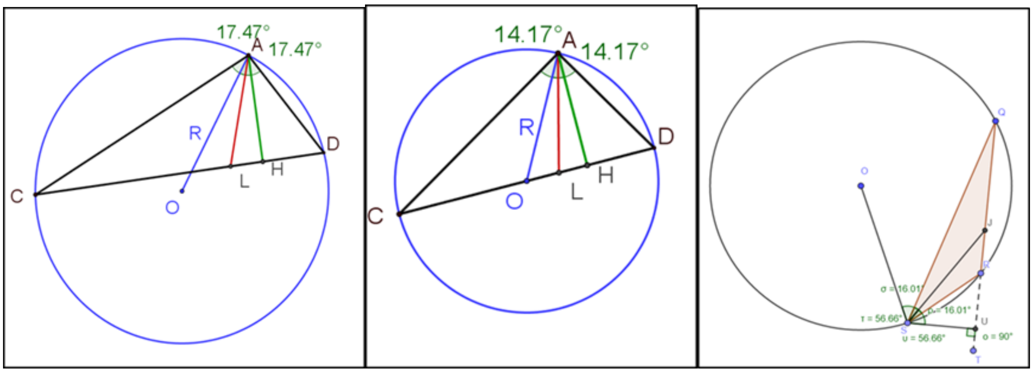
∠LCM = ∠LCB – ∠MCB = 39˚ – 22˚ = 17˚.

∠HCL = ∠LCM = 17˚

Значит, CL – биссектриса угла ∠HCM, стороны которого являются высотой и отрезком, проходящим через центр описанной окружности, проведенные из той же вершины данного треугольника.

В ИГС Geogebra было выполнено моделирование различных условий данной задачи в остроугольном, прямоугольном и тупоугольном треугольниках и проведено исследование, в результате которого было установлено, что $\angle OAL = \angle LAH$ в любом виде треугольника и при любых углах A и B.





Позже оказалось, что у данного свойства есть своё название в научной литературе – лемма о дважды биссектрисе [3].

Лемма формируется следующим образом: биссектриса AL треугольника ABC является также биссектрисой угла OAH, где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, AH – его высота.

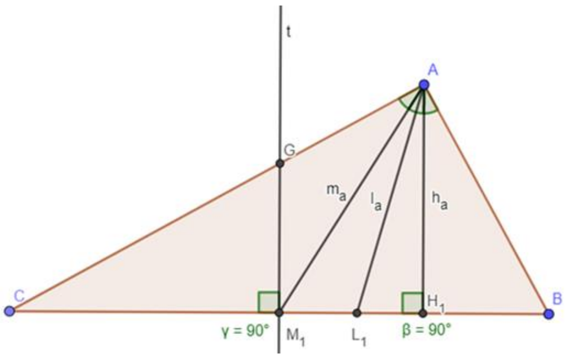
Это уже третий сюрприз биссектрисы угла треугольника.

Это свойство довольно часто можно использовать при решении задач [3]. В работе приведены примеры использования леммы о дважды биссектрисе для решения задач на вычисление, доказательство и построение.

Задача на вычисление.

Дано: в треугольнике ABC высота h_a и медиана m_a делят угол A на три равные части.

Найти угол A.

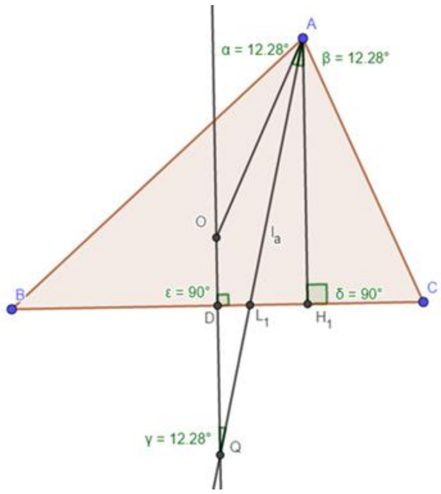


Решение. Проведем биссектрису $AL_1 = l_a$ и медиану $AM_1 = m_a$. Поскольку углы CAM_1 и H_1AB равны, то равны углы M_1AL_1 и L_1AH_1. Следовательно, центр O окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на медиане m_a. Но и серединный перпендикуляр t к стороне BC содержит точку O. Значит, точки O и M_1 совпадают. Тогда BC – диаметр и $\angle BAC = 90^{\circ}$.

Ответ: $\angle A = 90^{\circ}$.

Задача на доказательство.

Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне BC и продолжение биссектрисы l_a пересекаются в точке Q.



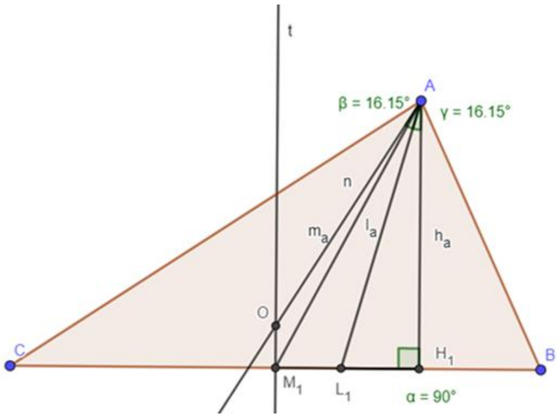
Доказать, что точка Q лежит на окружности с центром O, описанной около треугольника ABC.

Доказательство. Проведем высоту AH_1 и радиус OA. $\angle OAL_1 = \angle L_1AH_1$ (следует из леммы). Но $\angle L_1AH_1 = \angle OQA$ – как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых ($AH_1 \parallel OQ$). Следовательно, треугольник AOQ – равнобедренный, причем $OQ = OA = R_{окр}$. Значит, точка Q принадлежит окружности, описанной около треугольника ABC.

Задачи на построение.

Построить треугольник ABC по высоте h_a, медиане m_a и биссектрисе l_a, проведенным из вершины A.

Решение. Треугольники AH_1L_1 и AH_1M_1 можно легко построить по катету и гипотенузе. Из вершины A проведем луч n под углом, равным углу H_1AL_1. Согласно лемме, луч n содержит центр O окружности, описанной около треугольника ABC. Перпендикуляр t к прямой M_1H_1, проходящий через точку M_1, также содержит точку O. Таким образом, O – точка пересечения n и t.



Стоит отметить, что экспериментальным путем было установлено, что данная задача имеет решение только, если медиана длиннее биссектрисы, а биссектриса длиннее высоты.

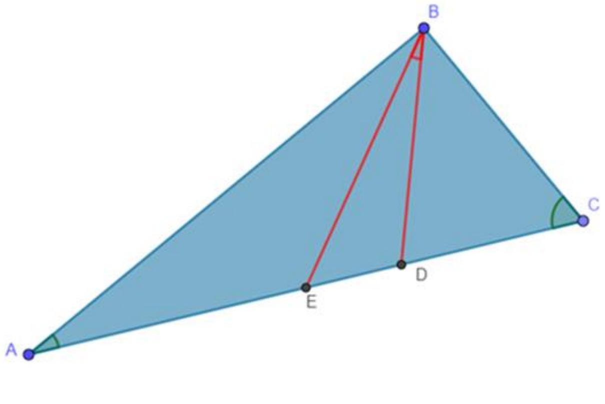
Ещё одно полезное свойство

Было установлено и доказано ещё одно свойство биссектрисы треугольника. Его можно применить не так часто, как лемму о дважды биссектрисе, но некоторые задачи оно упрощает.

Свойство: в прямоугольном треугольнике угол между медианой и биссектрисой прямого угла равен полуразности острых углов прямоугольного треугольника.

Дано: ΔABC; $\angle B = 90^\circ$; $AE = EC$; $\angle ABD = \angle CBD$.

Доказать: $\angle DBE = 0{,}5|\angle C - \angle A|$.



Доказательство: так как ΔABC – прямоугольный, то E – центр описанной окружности. Значит, $AE = EB = R_{окр}$, $\angle A = \angle EBA$, но и $AE = EC$, следовательно, ΔEBC – равнобедренный, $\angle C = \angle EBC$. $\angle A + \angle DBE = \angle C - \angle DBE$. Тогда $2\angle DBE = \angle C - \angle A$. Значит, $\angle DBE = 0{,}5|\angle C - \angle A|$.

Это уже четвертый сюрприз биссектрисы угла треугольника.

Автором была решена задача на вычисления, использующая данное свойство:

Дано: в прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равен 13°.

Найти: $\angle A$, $\angle B$.

Решение:

$\angle KCM = 0{,}5|\angle A - \angle B|$. Тогда $\angle A = \angle B + 2\angle KCM$.

$\angle A + \angle C + \angle B = 180°$; $\angle B + 2\angle KCM + 90° + \angle B = 180°$.

$2\angle B = 180° - 90° - 26° = 64°$; $\angle B = 32°$. $\angle A = 180° - 90° - 32° = 58°$.

Ответ: $\angle A = 58°$; $\angle B = 32°$.

Заключение

В результате выполнения работы:

1) была подтверждена гипотеза (в ходе выполнения работы будут найдены свойства биссектрисы угла треугольника, которые помогут при решении задач), достигнута цель (установление свойств биссектрисы угла треугольника, которые не изучаются в школе, но применяются при решении задач по геометрии и облегчают их решение), выполнены задачи;

2) было показано, что применение «Леммы о дважды биссектрисе треугольника» упрощает решение задач на вычисление, доказательство и построение.

Список использованных источников и литературы

1) Геометрия: 7 – 9 классы [Текст]: учебник / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 6-е изд. – Москва: Просвещение, 2016. – 383 с.

2) Бенефис биссектрисы внутреннего угла треугольника. Тетрадь с печатной основой по геометрии для 9 класса [Текст]. – Северодвинск: МБОУ «СОШ №24», 2014.

3) Учим математике-4 (материалы открытой школы-семинара учителей по математике) [Текст] / под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. – Москва: МЦНМО, 2014. – 192 с.