Уравнения. Линейное, квадратное уравнения

Математика

Рудазова Д.А.

7 класс, МОУ СШ №105, Волгоград

Научный руководитель: Уланкина Т.П., учитель математики

МОУ СШ №105, Волгоград

Введение

Уравнения в школьном курсе математике занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему. Действительно, уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее большинство задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь) [3]. Актуальность: решение уравнений всегда было и до сих пор остается острой проблемой в математике. В период обучения в школе формируются знания, умения и навыки, на основе которых будет строиться дальнейшее изучение математики. Вот почему так важно получить учащимся наиболее полную информацию о сущности уравнения и освоить способы его решения на примерах линейных, квадратных уравнений. В своей работе я хочу показать, как можно при помощи некоторых способов быстро и правильно решать уравнения (на примерах линейных, квадратных уравнений), что процесс выполнения математических действий оказывается полезным и интересным занятием.

Цель: расширить знания о способах решения линейных и квадратных уравнений.

Задачи:

1. Систематизировать известные способы решения линейных и квадратных уравнений;

2. Выбрать для себя самые интересные и использовать их на практике.

Объект: способы решения линейных и квадратных уравнений.

Гипотеза: при использовании способов решения линейных и квадратных уравнений расширяется кругозор, упрощается решение уравнений, количество ошибок уменьшается, повышается вычислительная культура учащихся.

Новизна: знакомство с нестандартными способами решения линейных и квадратных уравнений.

Методы исследования. Сбор информации по данной теме в сети Интернет. Систематизация и обобщение материала. Анкетирование. Анализ полученных в ходе исследования данных.

Продукт: буклет «Решить линейные, квадратные уравнения. Легко!»

Практическая значимость: решения линейных и квадратных уравнений с применением способов решения данных уравнений на практике. Данный материал можно использовать на уроках математики и для дополнительного образования. Любой ученик может развить в себе интерес к науке математике через данный материал.

Из истории изучения уравнений

Математики, внесшие вклад в развитие теории уравнений

В школьном курсе математики уравнениям уделяется большое внимание. История изучения уравнений насчитывает много веков. Самыми известными математиками, внесшими вклад в развитие теории уравнений, были:

Архимед (около 287–212 до н. э.) - древнегреческий ученый, математик и механик. При исследовании одной задачи, сводящейся к кубическому уравнению, Архимед выяснил роль характеристики, которая позже получила название дискриминанта;

Франсуа Виет жил в XVI в. Он внес большой вклад в изучение различных проблем математики. В частности, он ввел буквенные обозначения коэффициентов уравнения и установил связь между корнями квадратного уравнения;

Леонард Эйлер (1707 – 1783) - математик, механик, физик и астроном. Автор св. 800 работ по математическому анализу, дифференциальных уравнений, геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки.

Лагранж Жозеф Луи (1736 — 1813 гг.), французский математик и механик. Ему принадлежат выдающиеся исследования, среди них - исследования по алгебре (симметрической функции корней уравнения, по дифференциальным уравнениям (теория особых решений, метод вариации постоянных);

Ж. Лагранж и А. Вандермонд - французские математики. В 1771 г. впервые применили способ решения систем уравнений (способ подстановки);

О.И. Сомов – обогатил разные части математики важными и многочисленными трудами, среди них теория определённых алгебраических уравнений высших степеней;

Галуа Эварист (1811—1832 гг.) - французский математик. Основной его заслугой является формулировка комплекса идей, к которым он пришёл в связи с продолжением исследований о разрешимости алгебраических уравнений, начатых Ж. Лагранжем, Н. Абелем, создал теорию алгебраических уравнений высших степеней с одним неизвестным;

Несмотря на то, что ученые давно изучают уравнения, науке не известно, как и когда у людей возникла необходимость использовать уравнения. Известно только, что задачи, приводящие к решению простейших уравнений, люди решали с того времени, как стали людьми. Еще 3 - 4 тысячи лет до н. э. египтяне и вавилоняне умели решать уравнения. Правило решения этих уравнений, совпадает с современным решением.

Что такое уравнение?

Понятие уравнения

Давая определение уравнению важно отметить, что уравнением называется математическое соотношение, выражающее равенство двух алгебраических выражений. Если равенство справедливо для любых допустимых значений входящих в него неизвестных, то оно называется тождеством; например, соотношение вида $(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$ выполняется при всех значениях переменной x.

Уравнение — это математическое равенство, в котором неизвестна одна или несколько величин. Значение неизвестных нужно найти так, чтобы при их подстановке в пример получилось верное числовое равенство.

Уравнением можно назвать выражение $2 + x = 6$, с неизвестной переменной x, значение которой нужно найти. Результат должен быть таким, чтобы знак равенства был оправдан, и левая часть равнялась правой.

Корень уравнения

Говоря о корне уравнения важно отметить, что значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство, называется корнем уравнения [7].

Корень уравнения — это число, которое при подстановке вместо буквы обращает уравнение в верное числовое равенство (тождество). Число является корнем уравнения, так как при подставке вместо числа получается верное равенство . Корень уравнения также называют решением уравнения.

Например, корень уравнения $5x=40$ равен 8, так как при $x=8$ это уравнение превращается в верное числовое равенство:

$5 \cdot 8=40$

$40=40$.

Количество корней линейного уравнения зависит от значения a (коэффициента перед x).

Что значит решить уравнение?

Решить уравнение - значит найти все возможные корни или убедиться, что их нет.

Решить уравнение с двумя, тремя и более переменными — это два, три и более значения переменных, которые обращают данное выражение в верное числовое равенство.

Обычно, корень пишется так: $x = 3$. Если корней несколько, они просто перечисляются через запятую, например: $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

1. Некоторые уравнения могут быть не решаемы.

Например: $0 \cdot x = 7$. Какое бы мы число не подставили вместо x, получить верное равенство не получится. В этом случае в ответе пишется: «равнение не имеет корней».

2. Некоторые уравнения имеют бесконечное множество корней.

Например: $y = y$. В данном случае решением является любое число, т.е. $x \in R$, $x \in Z$, $x \in N$, где N, Z и R – это натуральные, целые и действительные числа, соответственно.

Линейное и квадратное уравнения

Рассмотри, самые часто встречающиеся уравнения — линейные и квадратные[1].

Особенность преобразований алгебраических уравнений в том, что в левой части должен остаться многочлен от неизвестных, а в правой — нуль.

Линейное уравнение выглядят так:

$ax + b = 0$, где a и b — действительные числа.

Вот, что поможет в решении:

если $a \neq 0$ — уравнение имеет единственный корень: $x = -b : a$;

если $a = 0$ — уравнение корней не имеет;

если a и b равны нулю, то корнем уравнения является любое число.

Чтобы научиться решать простые линейные уравнения, нужно запомнить формулу и два основных правила.

Правило переноса. При переносе из одной части в другую, член уравнения меняет свой знак на противоположный.

Для примера рассмотрим простейшее уравнение: $x+3=5$.

Начнем с того, что в каждом уравнении есть левая и правая часть.

Перенесем 3 из левой части в правую и меняем знак на противоположный. Можно проверить: $2 + 3 = 5$. Все верно. Корень равен 2.

Правило деления. В любом уравнении можно разделить левую и правую часть на одно и то же число. Это может ускорить процесс решения. Главное — быть внимательным, чтобы не допустить глупых ошибок.

Применим правило при решении примера: 4x=8.

При неизвестной x стоит числовой коэффициент — 4. Их объединяет действие — умножение.

Чтобы решить уравнение, нужно сделать так, чтобы при неизвестной x стояла единица.

Разделим каждую часть на 4. Как это выглядит:

4*x=8|:2

4x/4=8/4

x=2

Важно отметить, что квадратное уравнение выглядит так:

ax2 + bx + c = 0, где коэффициенты a, b и c — произвольные числа, a ≠ 0.

Таблица1

Решение неполного квадратного уравнения:

$b = 0, c \neq 0$	$b \neq 0, c = 0$	$b = 0, c = 0$
$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 = 0$
$x^2 = -\frac{c}{a}$	$x(ax + b) = 0$	$x^2 = 0$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ a и c разного знака	$x = 0$ или $ax + b = 0$ $x_1 = 0 x_2 = -\frac{b}{a}$	$x = 0$

Рассмотрим на конкретных примерах все 3 случая:

1) $4x^2 - 36 = 0$, 2) $3x^2 - 16x = 0$, 3) $-7x^2 = 0$,

$4x^2 = 36$, $x(3x - 16) = 0$, $x^2 = 0$,

$x^2 = 9$, $x_1 = 0$ или $3x - 16 = 0$, $x = 0$,

$x_{1,2}=\pm3$,$x^2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$,

Ответ: ±3. Ответ: 0; $5\frac{1}{3}$. Ответ: 0.

Таблица 2

Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	$\emptyset$

Таким образом, квадратное уравнение может иметь не более двух корней.

Рассмотрим способы решения квадратных уравнений

1. СПОСОБ: Разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение: x2 + 10x - 24 = 0.

Разложим левую часть на множители:

x2 + 10x - 24 = x2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).

Следовательно, уравнение можно переписать так:

(x + 12)(x - 2) = 0

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при x = 2, а также при x = - 12. Это означает, что число 2 и - 12 являются корнями уравнения x2 + 10x - 24 = 0.

2. СПОСОБ: Метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение x2 + 6x - 7 = 0.

Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение x2 + 6x в следующем виде:

x2 + 6x = x2 + 2* x * 3.

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 32, так как

x2 + 2* x * 3 + 32 = (x + 3)2.

Преобразуем теперь левую часть уравнения

x2 + 6x - 7 = 0,

прибавляя к ней и вычитая 32. Имеем:

x2 + 6x - 7 = x2 + 2* x * 3 + 32 - 32 - 7 = (x + 3)2 - 9 - 7 = (x + 3)2 - 16.

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$(x + 3)2 - 16 =0$, $(x + 3)2 = 16$.

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x2 = -7$.

3. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$ax2 + bx + c = 0$, $a ? 0$

на 4a и последовательно имеем:

$4a2x2 + 4abx + 4ac = 0$,

$((2ax)2 + 2ax * b + b2) - b2 + 4ac = 0$,

$(2ax + b)2 = b2 - 4ac$,

$2ax + b = \pm v\ b2 - 4ac$,

$2ax = - b \pm v\ b2 - 4ac$

4. СПОСОБ: Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x2 + px + c = 0$. (1)

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a =1$ имеет вид

$x1\ x2 = q$,

$x1 + x2 = - p$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если сводный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

Заключение

Математика, как и любая другая наука не стоит на месте, вместе с развитием общества меняются и взгляды людей, возникают новые мысли и идеи. Появление компьютеров внесло свои корректировки в способы решения уравнений и значительно их облегчило. Использование уравнений в повседневной жизни – редкость. Они нашли свое применение во многих отраслях хозяйства и практически во всех новейших технологиях.

Работа была выполнена в соответствии с поставленными задачами. Я изучила литературу и интернет-ресурсы по своей теме. Из всех видов линейных и квадратных уравнений я выбрала наиболее распространенные и рассмотрела способы и правила их решения.

Подводя итоги данного исследования, можно сделать следующие выводы:

уравнения представляют интерес для учащихся. При решении уравнений развиваются навыки систематизации, логического мышления, повышаются умственные и творческие способности. Их изучение очень важно в курсах школьной математики, так как примеры, содержащие уравнения, встречаются в повседневной жизни.

В ходе исследования были решены следующие задачи: систематизированы известные способы решения линейных и квадратных уравнений. Цель данной работы выполнена. Материал, приведенный в данной работе, может служить методическим пособием для учителя в работе с учащимися на уроках и факультативах, а также справочным материалом для учеников при самостоятельной подготовке к урокам и проверочным работам.

Список использованных источников и литературы

Научная и учебная литература

1. Алимов Ш. А. Алгебра. 7 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 224 с.
2. Алимов Ш. А. Алгебра. 8 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с.
3. Алимов Ш. А. Алгебра. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.

4. Алимов Ш. А. Алгебра. 7 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2022. – 224 с.

5. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2022. – 280 с.

6. Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений /Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2022. – 288 с.

7. Высоцкий И. Р. ОГЭ 2022. Математика. 9 класс. Три модуля. Основной государственный экзамен. 30 вариантов типовых тестовых заданий. /И. Р. Высоцкий, Л. О. Рослова, Л. В. Кузнецова и др.; под ред. И. В. Ященко. – М.: изд-во «Экзамен», МЦНМО, 22 – 167 с.

Электронные ресурсы удалённого доступа (INTERNET)

1. Уравнение: https://ru.wikipedia.org
2. Уравнение: https://gymnasium42.ru/work/ovsyannikova/page/page24.html
3. Уравнение. Определение и основные понятия: https://dl.bsu.by/mod/book
4. Уравнение: https://www.krugosvet.ru/enc/matematika/uravneniya
5. Уравнение: https://math.ru/lib/book/djvu/encikl/weber-1.djvu
6. Уравнение: http://es.niv.ru/doc/encyclopedia/mathematics