МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Математика: алгебра и начала анализа, геометрия

Дудко Доминика Владимировна
Учащаяся 8 класса МБОУ Ширинская СШ №18
Руководитель:
Несивкина Галина Анатольевна
учитель математики, МБОУ Ширинская СШ №18

Наверное, нет сегодня такой области знания, где бы не применялись достижения математики. Физики, химики, биологи, географы, экономисты, используют математический аппарат. В чем же секрет универсальности математического инструмента?

Ответ очевиден: ключ к решению многих задач- их удачный перевод на язык математики

Решение алгебраических задач в школьном курсе математики является важнейшей практической частью образовательного процесса. Задачи, представленные на языке алгебры, могут быть выстроены таким образом, что их решение можно осуществить различными методами, при этом всегда найдётся наиболее простой, быстрый и удобный.

Виды математических моделей:

1. Графическая модель
2. Геометрическая модель
2. Алгебраическая модель

Графическая модель – это представление объектов и процессов в виде их изображения. Например: карта, чертеж, схема, диаграмма, график.

Геометрическая модель описывает объекты, обладающие геометрическими свойствами.

Алгебраическая модель — это математическая модель, заданная в виде уравнений, неравенств или систем

Актуальность: математическая модель как основной инструмент для проведения исследований и решения задач

Практическая значимость.

В современном мире крайне важно обладать навыками решения алгебраических задач различными методами, включая геометрические. Это обусловлено тем, что в развернутой части ЕГЭ и на математических олимпиадах часто встречаются задания, для решения которых требуются нестандартные подходы. В своей работе я хочу поделиться опытом использования математической модели как основного инструмента для проведения исследований и решения задач.

Цель проекта: Основная цель заключается в формировании умений и навыков решения текстовых задач с помощью построения математической модели на углубленном уровне изучения.

Задачи проекта:

1.Узнать, что такое математическая модель.

2. Познакомиться с её видами.

3. Узнать, как строится математическая модель.

Гипотеза: существует универсальная математическая модель для решения всех типов задач.

Объект исследования: текстовые задачи на движение и на совместную работу.

Предмет исследования: текстовые задачи.

Методы исследования: анализ, обобщение, прогнозирование, эксперимент.

Этапы проекта:

1. **Изучение теории**

   Начинается с изучения теоретических основ математического моделирования и текстовых задач.

2. **Основные виды моделей.** Рассмотрим алгебраическую и одну из менее распространенных видов математических моделей: геометрическую.

3. **Эксперименты.** После этого проведем эксперименты с использованием этих математических моделей для решения задач на движение и совместную работу.

4. **Обобщение результатов.** В завершение мы обобщим полученные результаты и выявим наиболее эффективную математическую модель для решения данных задач.

Что такое математическая модель?

Математическая модель: определение и основные аспекты

Математическая модель — это результат перевода реальной задачи на математический язык. Она включает в себя выражения, формулы, уравнения, функции и графики, которые описывают и объясняют поведение исследуемого объекта или системы.

Термин «модель» происходит от латинского слова «modulus», что означает «образец». Изучая свойства модели, мы получаем возможность лучше понять и предсказать характеристики самого объекта. Это связано с тем, что математическая модель позволяет абстрагироваться от сложных деталей и сосредоточиться на ключевых аспектах, что делает её мощным инструментом для научных исследований, инженерии, экономики и других областей.

Математическое моделирование — это раздел математики, который занимается построением и анализом математических моделей. Оно включает в себя методы и техники для формализации и решения задач, связанных с реальными объектами и процессами.

Этапы математического моделирования

Цель решения любой задачи – получить верный ответ. Поэтому составление математической модели- это только первый этап решения задачи.

Решение текстовой задачи состоит из трех этапов:

Процесс создания модели называется моделированием. Он включает несколько этапов:

1. **Формулировка задачи**: Определение целей и условий исследования, а также выбор ключевых переменных.
2. **Построение модели**: Разработка математических выражений, описывающих взаимосвязи между переменными.
3. **Анализ модели**: Решение уравнений и оценка результатов.
4. **Интерпретация результатов**: Сравнение с реальными данными и выводы о поведении системы.

Применение моделирования к решению задач

Чтобы достичь цели, я рассмотрела математические модели (алгебраическая и геометрическая) и попыталась применить их к решению задачи о движении по окружности, взятой из открытого банка текстовых заданий ФИПИ, задания ВСОШ.

Задача 1. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 18 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 10 км/ч меньше скорости второго

Для решения данной задачи я использовала алгебраическую модель:

Алгебраическая модель.

Главная идея решения таких задач состоит в том, чтобы привести все к целому кругу.

Изобразим на рисунке

Когда прошел один час, первый не добежал 4 км до целого круга, тогда в свою очередь второй пробежал целый круг 18 мнут назад, т.е. за 60-18=42минуты.

Составим таблицу.

	Скорость	Время	Расстояние в один круг
Первый бегун	x	1	$x * 1 + 4$
Второй бегун	$x + 10$	$1 - \frac{18}{60} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}(x + 10)$

Заполним первый столбец (скорость). За неизвестную величину (X) возьмем скорость первого бегуна. Тогда скорость второго будет x+10.Время первого бегуна-один час, время второго 42 минуты. Обязательно минуты переводим в часы.

Зная скорость и время, за которое бегуны пробежали один круг, найдем сколько километров составляет один круг и составим уравнение:

$x+4=\frac{7}{10}(x+10)$

Решим уравнение:

$x+4=\frac{7}{10}x+7$

$x - \frac{7}{10}x=3$

$\frac{3}{10}x=3$

$x=10$

Ответ: 10 км/час скорость первого бегуна.

Геометрическая модель при решении задач на движение включает в себя графический метод, основанный на введении прямоугольной декартовой системы координат и построении линейных функций, графиком которых является прямая.

Главная идея заключается в том, что время движения располагается на оси абсцисс (горизонтальная ось – ох), а путь – на оси ординат (вертикальная ось – оу). При встречном движении графики линейных функций пересекаются, абсцисса точки пересечения показывает время встречи, а ордината – место встречи.

Методы решения: метод подобия треугольников, методы на использовании известных фактов и свойств геометрических фигур из школьного курса геометрии

Наибольшую трудность вызывают задачи олимпиадного характера. Рассмотрим одну из них

Задача1 (олимпиадная задача**).**

По шоссейной дороге движутся с постоянными скоростями в одну сторону пешеход и всадник, а в другую сторону – автобус и автомобиль. Всадник обогнал пешехода, а после через некоторое время встретил автобус, и ещё через такое же время встретил автомобиль. Автомобиль встретил сначала всадника, а потом ещё через такое же время обогнал автобус. Всадник обогнал пешехода в 9 часов, а пешеход встретил автомобиль в 10 часов. В какое время пешеход встретил автобус?

Решение: Схематически изобразим графики движения в одной системе координат, исходя из условия задачи, и отметим точки пересечения графиков.

Пусть обгонам и встречам

всадника соответствуют точки A, B, C,

автомобиля точки C, D, E.

Встреча автобуса и пешехода –точка O.

По условию задачи следует, что точки B, D-середины сторон треугольника ACE. Из этого получим, что O-точка пересечения медиан этого треугольника. По свойству медиан эта точка делит медиану AD в отношении 2/1.

Спроектируем точки A, O, E, D на ось времени t.

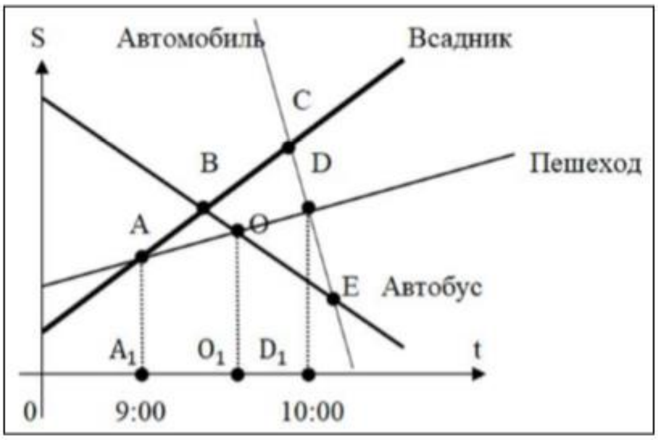
Проекция точки O-точка O1, а проекция точек A, D,-точка A1, D1.

Значит, проекция точки O делит отрезок A1D1 в этом же отношении.

$\frac{A1O1}{O1D1}=\frac{2}{1}$, A1O1=2O1D1

2O1D1+O1D1=A1D1,

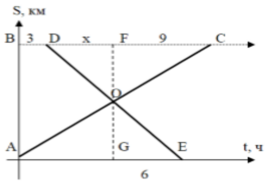
O1D1=1/3A1D1   A1O1=2/3A1D1 /Значит встреча произошла в 9 часов 40 минут



Рассмотрим, как используется *метод подобия треугольников* при решении данной задачи. Если в задачах встречается более двух движущихся объектов, то данный метод наиболее эффективен и удобен для быстрого нахождения искомых числовых данных

Задача 3

Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через 3 часа навстречу ему выехал второй мотоциклист, при этом после встречи он приехал в пункт A через 6 часов, а первый в пункт B через 9 часов. Сколько времени каждый мотоциклист находился в пути? .



$\frac{x}{6} = \frac{9}{x+3} => x^2 + 3x - 54 = 0$

$=> x = 6.$

$BC = 3 + x + 9 = 3 + 6 + 9 = 18,$

$CD = x + 6 = 6 + 6 = 12.$

Ответ: 18 и 12 часов.

Выявление оптимальных моделей для решения конкретных задач

Задачи на совместную работу

Для эффективного решения задач на совместную работу рекомендуется использовать **алгебраическую модель.**

Составим таблицу, в которой производительность, объем работы и время связаны с такими параметрами, как скорость, время и расстояние.

Задача1.

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить задание за 20 дней. За сколько дней каждый из них справится самостоятельно, если одному требуется на 9 дней больше, чем другому?

Решение: Для решения этой задачи введем переменные и составим уравнение, основанное на скорости выполнения работы.

	t	***P***	***A***
I рабочий	***x***	$\frac{1}{x}$	1
II рабочий	***x+9***	$\frac{1}{x+9}$	1
Вместе	20	$\frac{1}{20}$	1

Обозначения:

Пусть первый рабочий выполняет задание за x дней (его производительность равна 1/x задания в день.)

Второму рабочему требуется на 9 дней больше, т.е. он выполняет задание за (x+9) дней (его производительность равна 1/ x+91 задания в день.)

Работая вместе, они выполняют задание за 20 дней, их совместная производительность равна 1/20 задания в день.

Совместная производительность равна:1/x+1/x+9=1/20

20(2x+9)= x(x+9)

x^2-31x-180=0

x1=-5, x2=36

Так как время не может быть отрицательным, берем x=36

Ответ: Первый рабочий справится с заданием за 36 дней, второй за 36+9=45 дней

Геометрическая модель.

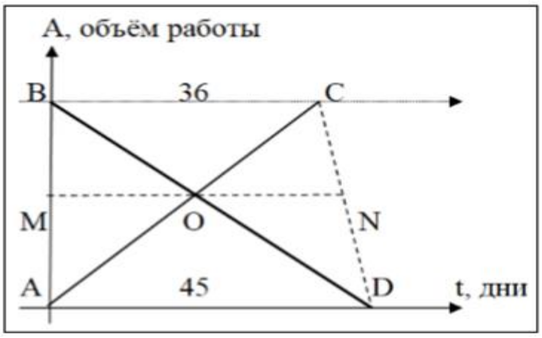
Можно также использовать геометрический метод для задач на совместную работу

Задача2

Первая строительная бригада может выполнить работу за 36 дней, а вторая бригада – за 45 дней. За сколько дней две бригады выполнят всю работу, работая одновременно?

Решение:

Изобразим графики выполнения работ АС и ВД первой и второй строительных бригад соответственно.



Абсцисса точки О означает время, за которое выполнят всю работу две бригады, работая вместе. Из подобия треугольников ΔВОС~ ΔАОВ получаем, что

$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD}, \frac{BO}{OD} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}.$ ΔBMO~ΔBAD имеем, что $\frac{MO}{AD} = \frac{BO}{BD}.$

$$MO = \frac{AD \cdot BO}{BD} = 45 \cdot \frac{4}{9} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Следовательно, получаем, что обе бригады вместе выполнят всю работу за 20 дней.

Ответ: 20 дней.

Заключение

В результате исследования были получены следующие результаты:

1. Изучен процесс математического моделирования и этапы создания модели для конкретной задачи.

2. Опровергнута гипотеза о существовании универсальной математической модели для всех типов задач.

3. Навык составлять математические модели различного типа.

4. Определены оптимальные математические модели для решения конкретной задачи.

Я считаю, что моделирование — ключ к успеху в будущем. Умение создавать математические модели станет незаменимым инструментом для решения задач в различных областях науки и в повседневной жизни.

Решение задач с использованием моделирования активизирует мыслительную деятельность, помогает глубже понять суть проблемы, самостоятельно найти рациональный способ её решения, определить подходящий метод проверки и выявить условия, при которых задача имеет (или не имеет) решение.

Список литературы

Смирнов В. И. Математическое моделирование и текстовые задачи. — М.: Просвещение, 2005.

Ахметов Р. Т. Методы математического моделирования в образовании. —СПб.: Лань, 2010.

Иванов А. С. Математические модели и задачи. — Новосибирск: Сибирское соглашение, 2008.

Петрова О. Н. Текстовые задачи и математическое моделирование. — Екатеринбург: Урал, 2012.

Сидоров В. П. Основы математического моделирования. — Казань: Казанский университет, 2009.